

9.1.2013

Ich wünsche allen ein gesundes und
erfolgreiches neues Jahr! ▽

Rang einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (m \times n) - \text{Matrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Zeile} \quad \text{Spalte} \end{array}$$

$\text{rg}(A)$: Rang von A

Maximalzahl linear unabh. Zeilen
(bzw. Spalten)

Rangbestimmung

$$\text{Bp: } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Ziel}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

bzw. bei $\text{rg } A < 3$ eine Null

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} + 1. \text{ Zeile}$$

Treppenstufenform

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} : -14 \\ : 2 \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} - 19 \times 2. \text{ Zeile}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{93}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{:-\frac{93}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{NR: } 1 - 19 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{93}{2}$$

dann ist $\text{rg } A = 3$

Bp: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{Zeil}}$

Zeilenstufenform durch
erlaubte elementare Umformungen

$$\begin{pmatrix} \overset{3}{1} & \overset{3}{1} & \overset{0}{0} & \overset{0}{0} \\ \bar{3} & 0 & 2 & 1 \\ \bar{1} & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \times 1.2. \\ -1 \times 1.2. \end{matrix}$$

3x4

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{:-3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4 \times 2.2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{:\frac{10}{3}}$$

$$\text{NR } 7 + \frac{8}{3} \quad 9 + \frac{2}{2} \quad \frac{31}{3} \cdot \frac{5}{29}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{29} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3 = \min\{3, 4\}$$

voller Rang

Lineare Gleichungssysteme (LS)

Bp: Drei Reisende - - -

Barschaft des 1. Reisenden X

Barschaft des 2. Reisenden Y

Barschaft des 3. Reisenden Z

1. Gleichung $73 + x + y = 2(x + z + y + z)$
etc.

GS allgemein

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Lösungsweg:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Betrachtungen zur Lösung:

1 Gleichung 1 Unbekannte $\Rightarrow$ 1 Lösung

$$\text{Bsp: } 10x = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

1 Gleichung 2 Unbekannte

$$\text{Bsp: } 5x + y = 20$$

$$\Leftrightarrow y = -5x + 20$$

Gerade
 $\Rightarrow$ viele Lösungen

Um eine exakte Lösung zu erhalten, braucht man

eine 2. Gleichung

Der Lösungsalgorithmus von Gauß an einem Beispiel

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 16$$

↓ Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix

Pivotelement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array} \right) \quad (-1)$$

Auswahl einer Zeile:

Pivotzeile

Auswahl einer Spalte:

Pivotspalte

1. Iteration

$$\downarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 2.2 \text{ } (-1.2) \\ 3.2 \text{ } (-3 \times 1.2) \\ 4.2 \text{ } (+2 \times 1.2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ \\ \end{array}$$

2. Iteration

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +4 \times 2.2 \\ -10 \times 2.2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array} \right) :3$$

3. Iteration

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array} \right) -6 \times 3.2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 42 \end{array} \right) :21$$

NR

$$17 + \frac{12}{3}$$

$$17 + 4$$

$$34 + 8$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$X_4 = 2$$

$$x_3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = 0 \quad \text{Rücksubstitution}$$

$$x_2 - 1 \cdot x_3 - \frac{5}{2} \cdot x_4 = -2$$

$$\text{also: } x_2 - 0 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -2 \Leftrightarrow x_2 - 5 = -2 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

$$x_1 + 2 \cdot 3 - 0 - 3 \cdot 2 = -1$$

$$x_1 = -1 - 6 + 6 \Leftrightarrow x_1 = -1$$

Lösung des LGS : $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 2$

Bemerkungen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots & b_1^* \\ \textcolor{red}{1} & \dots & \dots & \dots & b_2^* \\ 0 & \textcolor{red}{1} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \textcolor{red}{1} & \dots & b_n^* \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$$

dann eindeutige Lösung

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & b_1^* \\ & 1 & & & & & b_2^* \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) < n$$

$\Rightarrow$ unendliche viele Lösungen
GS unterbestimmt

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & b_1^* \\ & 1 & & & & & b_2^* \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & b_n^* \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \end{array} \right)$$



das GS ist widersprüchlich

Anwendungsbeispiel:

x_L : Gesamtleistung der Landwirtschaft

x_1 : " " Industrie 1

x_2 : " " " 2

$$X_L = 0,2 X_L + 0,8 X_1 + 800$$

$$X_1 = 0,3 X_L + 0,4 X_1 + 0,125 X_2 + 1200$$

$$X_2 = 0,2 X_L + 0,4 X_1 + 0,25 X_2 + 600$$

$$0,8 X_L - 0,8 X_1 = 840$$

$$-0,3 X_L + 0,6 X_1 - 0,125 X_2 = 1130$$

$$-0,2 X_L - 0,4 X_1 + 0,75 X_2 = 618$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,8 & 0 & 800 \\ -0,3 & 0,6 & -0,125 & 1200 \\ -0,2 & -0,4 & 0,75 & 600 \end{pmatrix}$$

↓ Gauß'scher LA

Matrix am Ende :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3,75 & -3000 \\ 0 & 1 & -1,25 & -1333\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7600 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 7600 \text{ LE}$$

Rücksubstitution $\rightarrow x_1 = 8166 \frac{2}{3} \text{ LE}$ Beantwortung Frage ①

$$x_2 = 9166 \frac{2}{3} \text{ LE}$$

Beantwortung Frage 2: $x_A = 0.04 x_2 + 0.08 x_1 + 0.12 x_2$

Einsetzen der Lösungen aus ①: $x_A = 1932 \text{ ZE}$

gezahlter Lohn: $x_{\text{Lohn}} = 2.6 x_L + 4.3 x_1 + 1.7 x_2$
 $= 71870 \text{ WE}$

Beantwortung Frage 3: GS mit veränderten Endnachfragen nochmals lösen!

Lösungen: $x_L = 8965 \quad x_1 = 7915 \quad x_2 = 7436$

LGS und Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad A^{-1} \text{ Inverse}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$x_1 = b_1^*$$

$$x_2 = b_2^*$$

$\vdots$

$$x_m = b_m^*$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow E$$

Umformungen wie beim Gauß'schen LA

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{e}_j}_{j\text{-te Spalte der Matrix } A^{-1}}$$

daher heißt für jedes $j = 1, \dots, m$ der Vorgang

die j -te Spalte von A^{-1}

d.h. A^{-1}

Berechnung der Inversen:

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

↓

elementare
Umf. des Gauß'schen LA

parallel
→
auch ein
Einheitsmatrix

E

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Gesucht A^{-1}

3.2 $-2 \times 1.$ Zeile $\downarrow$

$\downarrow$

1.2 - 2. Zeile
2. Zeile : 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

+ 3x umgew. 2. Zeile

$\downarrow$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E

A^{-1}

