

Vorlesung 16.1.2013

Determinanten

Berechnung des Inversen von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ liefert u.a.

$$\text{ein } D = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Determinante

"Kennzahl für Matrix"

Def: Jeder quadratischen Matrix A ist eindeutig eine reelle Zahl

Zugeordnet, diese heißt Determinante

$$D = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22}} - \underline{a_{12} a_{21}} \quad \text{zweireihige Determinante}$$

Determinante einer (3×3) -Matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}} \underline{a_{22}} \underline{a_{33}} + \underline{a_{12}} \underline{a_{23}} \underline{a_{31}} + \underline{a_{13}} \underline{a_{21}} \underline{a_{32}} \\ - \underline{a_{13}} \underline{a_{22}} \underline{a_{31}} - \underline{a_{12}} \underline{a_{21}} \underline{a_{33}} - \underline{a_{11}} \underline{a_{23}} \underline{a_{32}}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$

Dann ist $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$

$I(j)$: Anzahl der
Inversionen
(Umstellungen)

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{mj_m}$$

Sei A eine (4×4) -Matrix: Wieviele Summanden mit jeweils vieren Faktoren hat die Determinante?

24 Summanden mit je 4 Faktoren
= $4!$

Regel von Sarrus zur Berechnung einer dreireihigen Determinante

$$\begin{array}{ccccc}
 + & + & + & - & - \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\
 & - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{31}
 \end{aligned}$$

Bp:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot 6 \\
 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \cdot 6 - 0 \cdot (-2) \cdot 8 = -83$$

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauscht man zwei Zeilen, dann ändert sich das Vorzeichen, vertauscht man mehrere Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen nur bei einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen.

$$2) \quad \det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det A$$

3) Sind Zeilen von A linear abhängig, dann ist $\det A = 0$

$$4) \quad \det A = \det A'$$

↗
transponierte von A

Einfachere Methoden zur Berechnung höher-reihiger Determinanten

Notwendige Begriffe:

Def:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & & & a_{mj} & & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Streichen der i -ten Zeile
und der j -ten Spalte

$|A|_{ij}$ heißt MINOR

Bp:
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$\vdots$

$$|A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

insgesamt gibt es hier $3^2 = 9$ Minoren

Def: Adjunkte einer Determinante

mit dem
Vorzeichen
nach folgendem
Muster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & - & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

wird aus der Anordnung der Minoren die
Adjunkte

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |A|_{ij}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Entwicklung nach der Zeile i

$$\det A = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\sum_{j=1}^3 (-1)^{\overset{+}{1}+j} \overset{+}{a}_{1j} |A|_{\overset{+}{1}j} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = \underline{\underline{12}}$$

Entwicklung nach der Spalte j :

$$\det A = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} |A|_{ij}$$

Bp. $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ 4 & 2 & \overset{-}{-1} \\ -2 & 3 & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$

Entwickeln nach 3. Spalte:

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 4 + 8 = 12$$

Durch den Entwicklungssatz von Laplace hat man durch schrittweise Reduzierung der "Ordnung" die Möglichkeit, Determinanten höherer Ordnung zu berechnen!

Bp :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 4. Zeile :

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 2. Spalte

nach 2. Zeile

nach 1. Spalte

$$= (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) + 1 = 0$$

Berechnen der Determinante einer Dreiecksmatrix

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & a_{33} & \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \\
 &= \text{Entwickeln nach 1. Spalte} \quad a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & a_{33} & \\ 0 & & a_{mm} \end{vmatrix} \\
 &= \text{Entwickeln nach 1. Spalte} \quad a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{3m} \\ 0 & a_{mm} \end{vmatrix} \\
 &= \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mm} \\
 &\quad \text{immer nach 1. Spalte}
 \end{aligned}$$

Die Determinante auf "Dreiecksform" bringen heißt TRIANGULIEREN

Achtung: Zeilen- bzw. Spaltentausch wirkt sich auf das Vorzeichen aus!

Die Cramer'sche Regel

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

A sei $(n \times n)$ -Matrix

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

A_j ist die Koeff.-matrix mit Lösungsvektor in j -te Spalte

Bp:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = -2$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_2| = 4$$

$$x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_3| = -2$$

$$x_3 = \frac{-2}{2} = -1$$