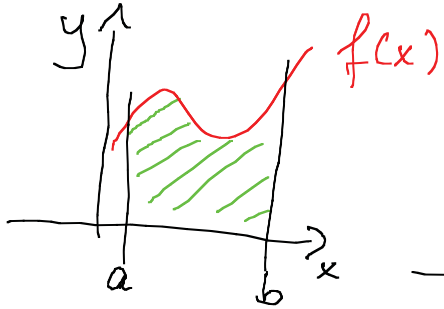
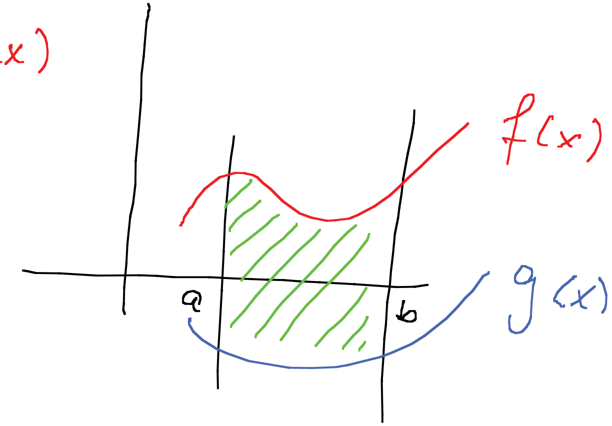
23. 1. 2013

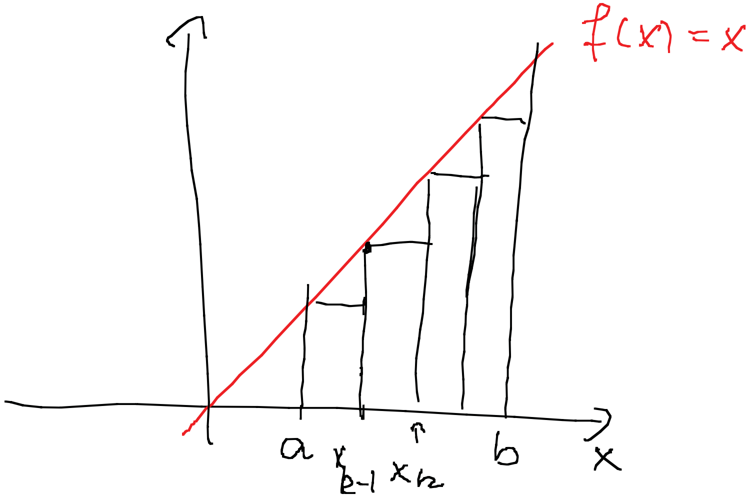
Integralrechnung

$$y' \xrightarrow{?} y$$





Bp: $f(x) = x$



$$\int_a^b x \, dx$$

wähle: n Teilintervalle

$$\Delta x = \underbrace{x_k - x_{k-1}}_{} = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

$$k=0 : x_k = a$$

Man wähle hier die Untersumme: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$

$$\Big\downarrow \text{ da } f(x) = x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a + (k-1)\Delta x)}_{x_{k-1}} \cdot \Delta x \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^{n} (k-1) \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^{n}(k-1)\right)$$

NB: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

NB: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x \left(n\cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n} \left(n\cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((b-a)\left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\right) \quad \frac{n-1}{n} \to 1$$

NR

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$\nearrow 0$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} \right)$$

$$= 1$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

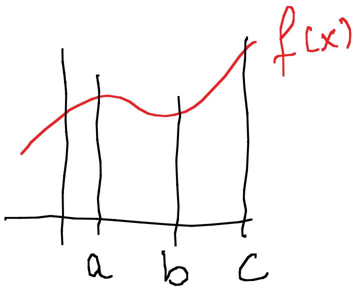
$$= \dots = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Also:

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Regeln:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$



$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a < b < c$$

Zusammensetzen des Integrationsweges!

$$\int_a^b \left(c f(x) + d\, g(x)\right) dx = c \int_a^b f(x)\, dx + d \int_a^b g(x)\, dx$$

Linearität !

$f_1 \leq f_2$ $\quad$ f_1, f_2 integrierbar

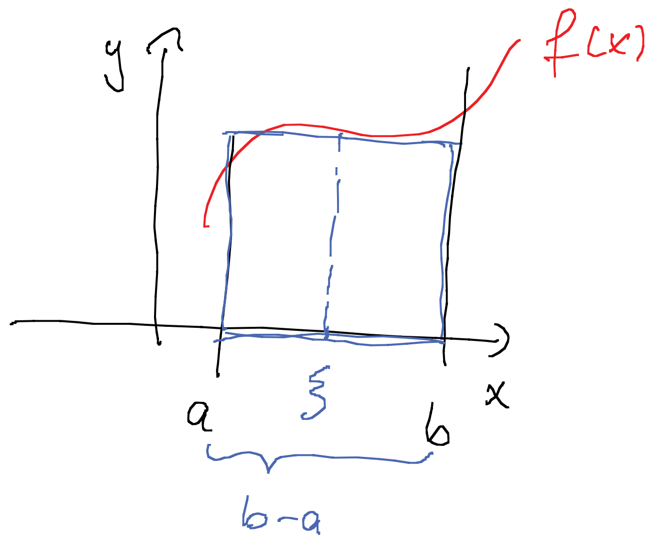
$$\Rightarrow \int_a^b f_1(x)\, dx \leq \int_a^b f_2(x)\, dx$$

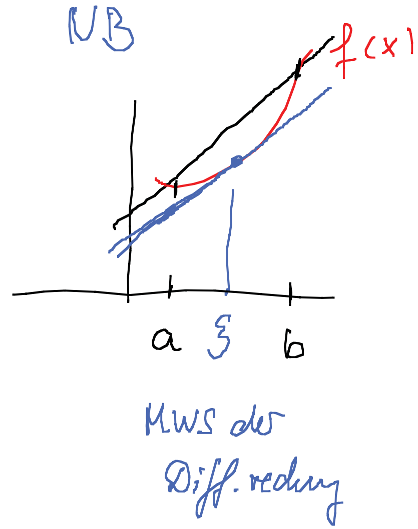
Satz: Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort integrierbar

d.h. $\int_a^b f(x)\, dx$ existiert

Mittelwertsatz der Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \cdot \xi$

$$\xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{heißt Mittelwert}$$

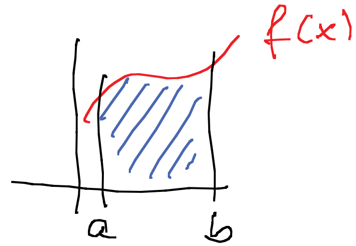




Def: Flächeninhalt

f stetig auf $[a,b]$ und $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{der Flächeninhalt}$$



Das <u>unbestimmte</u> Integral

Gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = F'(x)$$

nicht eindeutig $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$

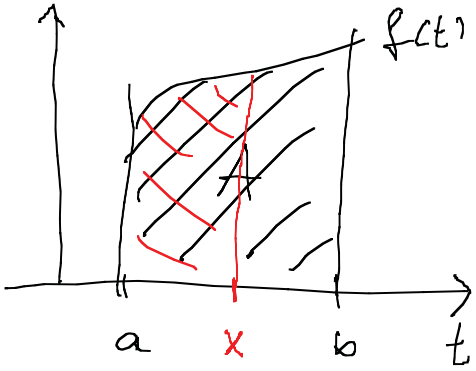
$$C \in \mathbb{R}$$

$F(x)$ ist daher <u>unbestimmt</u>!

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und bestimmten Integral bestimmtes Integral

$$A = \int_a^b f(t)\,dt$$



$$I(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt$$ Integralfunktion

Eigenschaften von $I(x)$

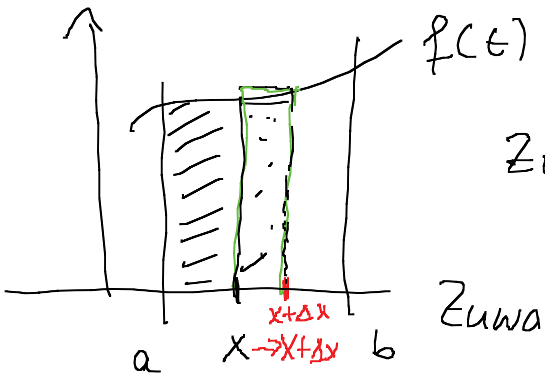
$$I_1 : x \longmapsto \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt$$

$$I_2 : x \longmapsto \int_{c_2}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$$ konstant

da x "weg" ist!

Betrachte $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$



Zuwachs $\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$

Zuwachs: $f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta I \leq f(x+\Delta x) \cdot \Delta x$

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \quad = I'(x) \quad = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = I'(x)$$

Hauptsatz der Integralrechnung

Jedes unbestimmte Integral

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$

mit $I'(x) = f(x)$

Folgerung:

Ziel $\int_a^b f(x)\,dx$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \underset{*}{=} F(x) - F(a)$$

Aus $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \Longrightarrow \overset{*}{C} = -F(a)$

Für $x = b$: $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Wichtig zur Berechnung bestimmter Integrale

Es bleibt "nur noch": Aufsuchen von Stammfunktionen

Aus Ableitungen einfacher Funktionen kann man auf Stammfunktionen schließen:

NB

$y = x \qquad y = cx$

$y' = 1 \qquad y' = c$

1) $f(x) = c \quad c$ konst.

$\Rightarrow F(x) = cx + C, \; C \in \mathbb{R}$

$y' = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$

2) $f(x) = x$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2} + C, \; C \in \mathbb{R}$

3) $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, \; C \in \mathbb{R}$

4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \; C \in \mathbb{R}$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C, \; C \in \mathbb{R}$

6) $\int e^x \, dx = e^x + C, \; C \in \mathbb{R}$

7) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \; C \in \mathbb{R}$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C, \; C \in \mathbb{R}$

Weitere „Grundintegrale" in den Formelsammlungen

Integrationsmethoden zur Berechnung „komplizierter" Integrale

Summenregel: $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$

Bp: $\int (5x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 7x^2 + 8x - 2)\,dx$

$$= \frac{5x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + 7\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 2x$$

$$= x^5 + \frac{x^4}{8} + \frac{7x^3}{3} + 4x^2 - 2x$$

2) Partielle Integration = Produktintegration

Produktregel in Differentialrechnung: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Umformen: $\int f(x)\cdot g'(x) = \int (f(x)\cdot g(x))' - \int f'(x)\cdot g(x)$

Integration auf beiden Seiten

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Ziel: dieses Integral muss einfacher werden!

Bp: 1) $\int x \cdot e^x \, dx$ $\quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} \, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x$$

$$= e^x (x - 1) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

2) $\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} \, dx$ $\quad f'(x) = 2x$

$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \, dx$$

nochmals partielle Integration

n.O.

$e^x(x-1)$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\left(\underset{(x e^x - e^x)}{e^x(x-1)}\right)$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x - 2e^x = \boxed{e^x(x^2 - 2x - 2)} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

3) $\int \underset{f(x)}{\sin x} \cdot \underset{g'(x)}{\cos x} \, dx$

$f(x) = \sin x \qquad g'(x) = \cos x$

$f'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx \quad \Big| + \int \cos x \sin x \, dx$$

$$2 \int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x \quad \Big| : 2$$

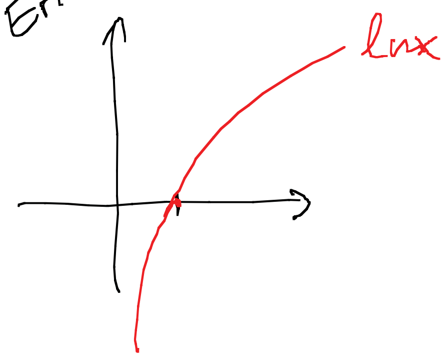
$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

4) $$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx$$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

Erinnerung:



$$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

und $x > 0$

Integration durch Substitution

Zur Erinnerung: Kettenregel in der Differentialrechnung

Bp: $y = \sqrt{\underbrace{4x^2-2}_{\text{innere Funktion}}} = (4x^2-2)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(4x^2-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = 4x(4x^2-2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-2}}$

Bp: $\boxed{\int \sqrt{\underbrace{x^2+2}} \cdot \underbrace{2x\ dx}}$

$z = x^2+2$

$\frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow \underline{dz = 2x\,dx}$

$\int \sqrt{\underset{x^2+2}{z}}\ \underset{2x\,dx}{dz} = \int z^{\frac{1}{2}}\,dz = z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$

$= \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$

Rücksubstitution

Allgemein: $\int (f(g(x))) \cdot g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz$ $\quad z = g(x)$

$dz = g'(x) \cdot dx$

Bp: 1) $\int \frac{1}{2x+3}\, dx$ $\quad z = 2x+3$

$\frac{dz}{dx} = 2 \Rightarrow \boxed{dz = 2dx}$

$dx = \frac{1}{2} dz$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} \underset{2x\,dx}{dz}$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2} \ln|z| = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Rücksubstitution

2) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$ $\quad z = -x^2 \quad z' = \frac{dz}{dx} = -2x$

$dz = -2x \cdot dx \quad dx = -\frac{1}{2} dz$

$-\frac{1}{2}\int e^z \; \underset{-2x\,dx}{dz}$

$-\frac{1}{2}\int e^z dz = -\frac{1}{2}e^z$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rücksubst.}}}{=} -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \quad C \in \mathbb{R}$

3) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad z = \ln x \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \qquad dz = \frac{1}{x}\,dx$

$= \int \frac{1}{x}\cdot \ln x \, dx \qquad \int z \; \underset{\frac{1}{x}dx}{dz} = \frac{1}{2}z^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rücksubst.}}}{=} \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$

4) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx \qquad z = 1 + \underbrace{\sin^2 x} = 1 + \underset{u}{\sin x}\cdot\underset{v}{\sin x}$

Ableitung mit Kettenregel oder Produktregel

$z' = \frac{dz}{dx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} 2\sin x \cdot \cos x$

$dz = 2\sin x \cdot \cos x \; dx$

$dx = \frac{dz}{2\sin x \cdot \cos x}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,\underset{2\sin x\cos x\,dx}{dz}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\ln|z| + C \qquad C\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+\sin^2 x\right| + C$$

Rücksubst.