30. 1. 2013

Erwähnung: Integration gebrochenrationaler Funktion

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

$Z(x)$, $N(x)$ ganzrationale Funktionen

Vorgehen: Zerlegung in Partialbrüche

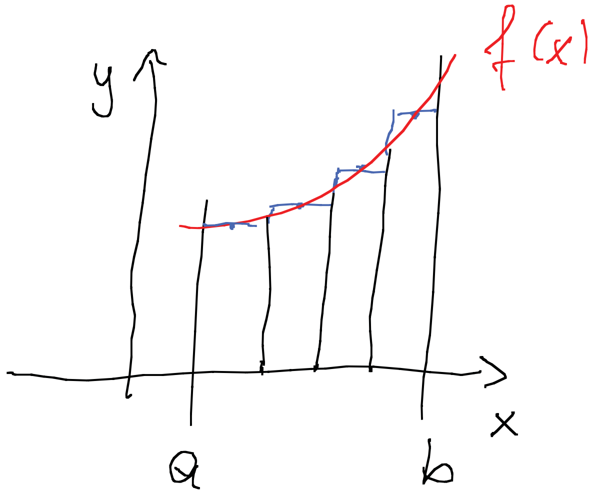
Bp: $$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{\underbrace{x}} + \frac{B}{\underbrace{x-1}} + \frac{C}{\underbrace{x+1}}$$

Linearfaktoren, die sich aus den Nennernullstellen ergeben!

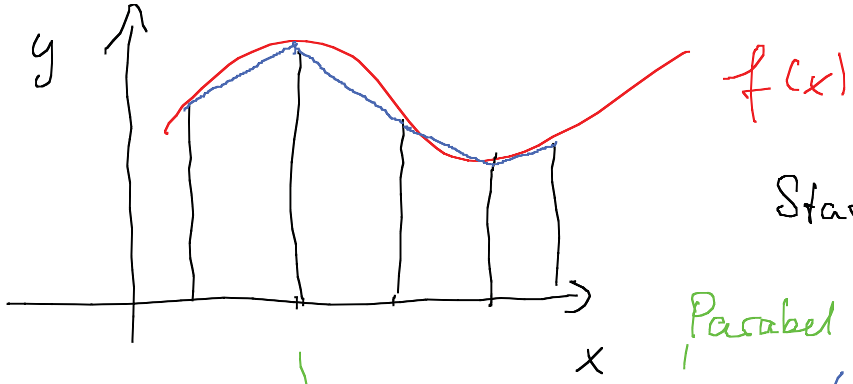
Ein Integral ist geschlossen lösbar, wenn es in endlich vielen Schritten mit den bekannten Integrationsregeln gelöst werden kann!

Ansonsten numerische Integrationsverfahren

z.B. 1) Rechtecksapproximation

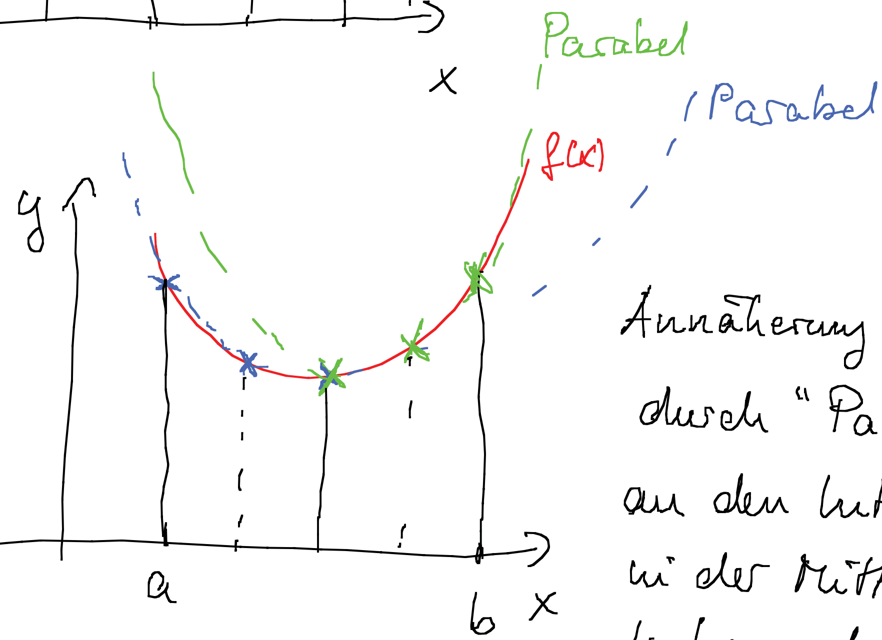


2) Trapezregel



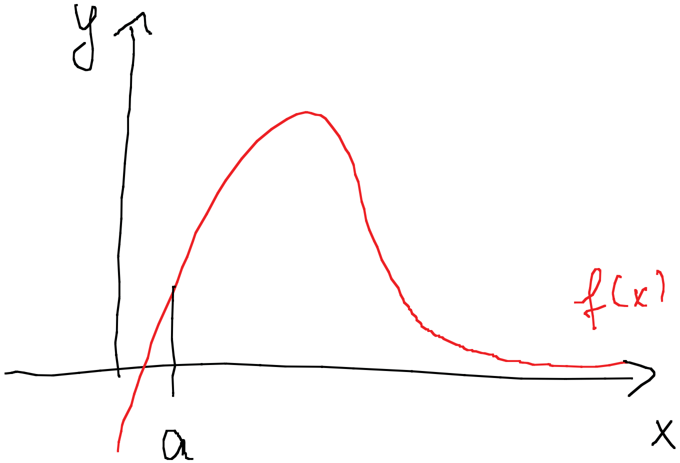
Statt Rechtecke: Trapeze

3) Simpson-Regel



Annäherung auf Teilintervallen durch "Parabeln", die an den Intervallenden und in der Mitte mit dem Integranden übereinstimmen!

Uneigentliche Integrale



$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

Vor: f auf $[a, b_n]$ mit $b_n \to \infty$ integrierbar

f auf $[a_n, b]$ mit $a_n \to -\infty$ "

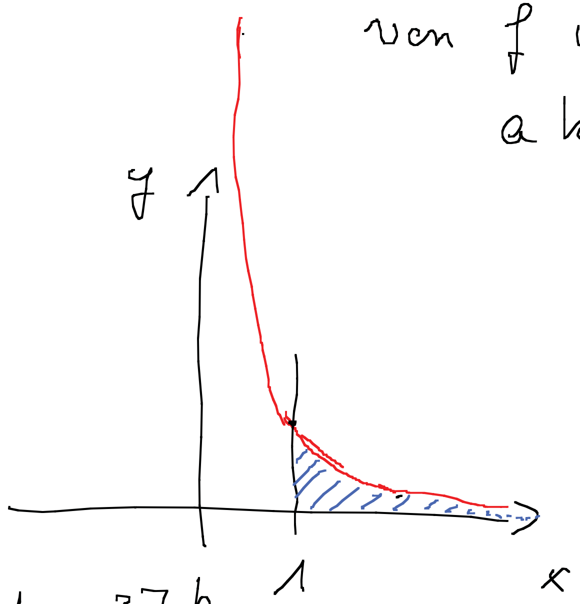
f auf $[a_n, b_n]$ mit $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ integrierbar

bei a: Polstelle Vor: $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$

Falls der Grenzwert existiert, dann heißt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

das uneigentliche Integral von f in den Grenzen a bis b



Beispiele

1) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right)$$

2) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{-0}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1\right)$$

$\to 0$

$= \frac{1}{3}$

$\rightarrow 0$

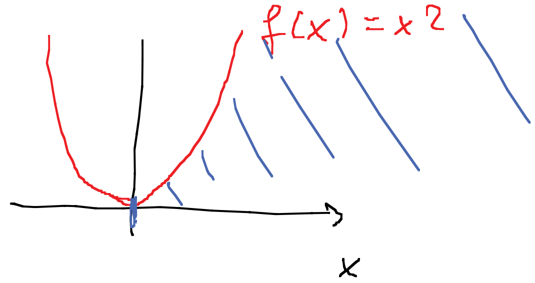
$$= 1$$

damit $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^b$

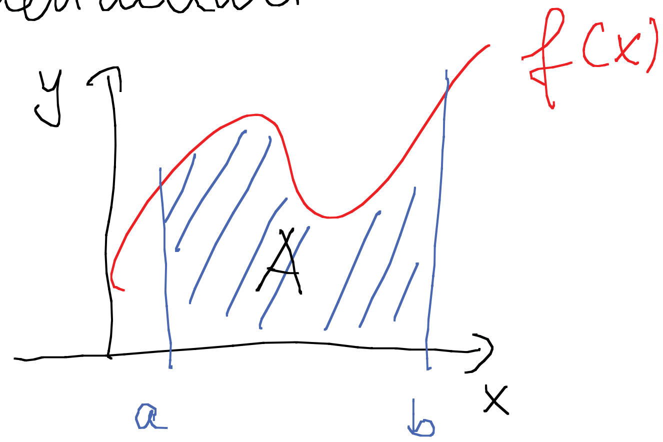
$$= \lim_{b\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{3}b^3}_{\to\infty} - \frac{1}{3}0^3\Big) = \infty$$

$$\int_0^\infty x^2 \, dx \quad \text{ist} \quad \boxed{\text{divergent}}$$



Anwendungen der Integralrechnung

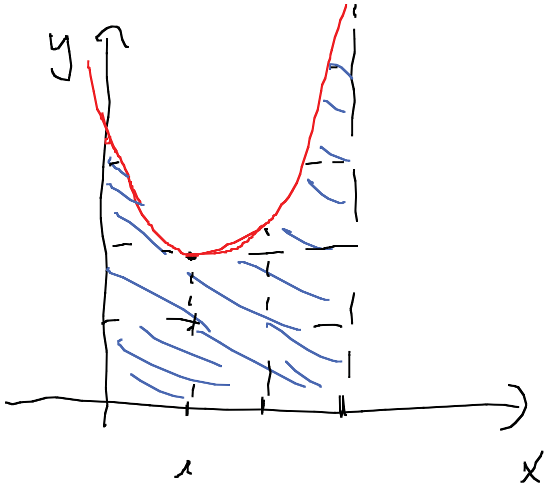
1) Flächeninhalt



$$\int_a^b f(x) \, dx = A$$

Vor: $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$

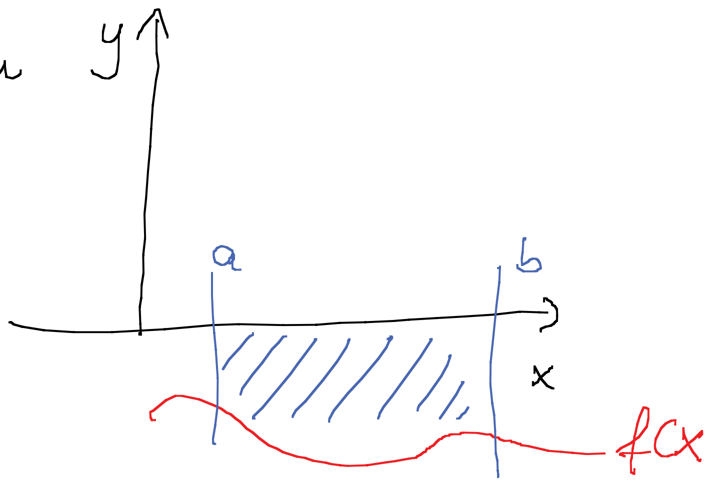
Bsp:
$$\int_0^3 (x^2-2x+3)\,dx$$



$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^3$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 9 - 0 = 9\text{ FE}$$

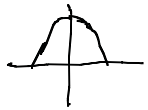
Was passiert, wenn

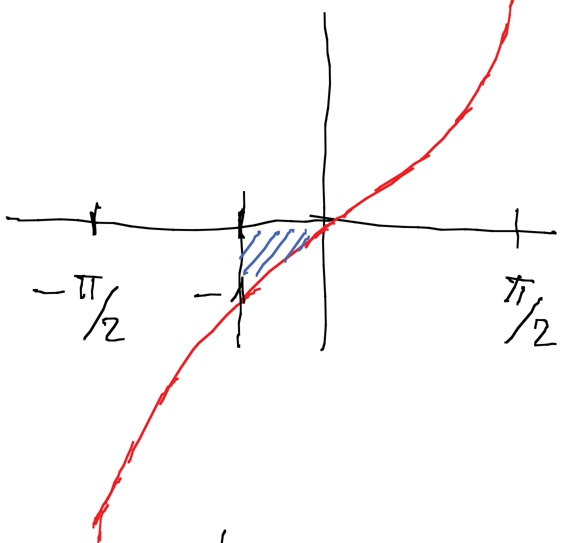


$f(x) \leq 0$ auf $[a,b]$

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Bp: 1) $\int_{-1}^{0} \tan x \, dx$ Flächeninhalt !





$$A = \left| \int_{-1}^{0} \tan x \, dx \right|$$

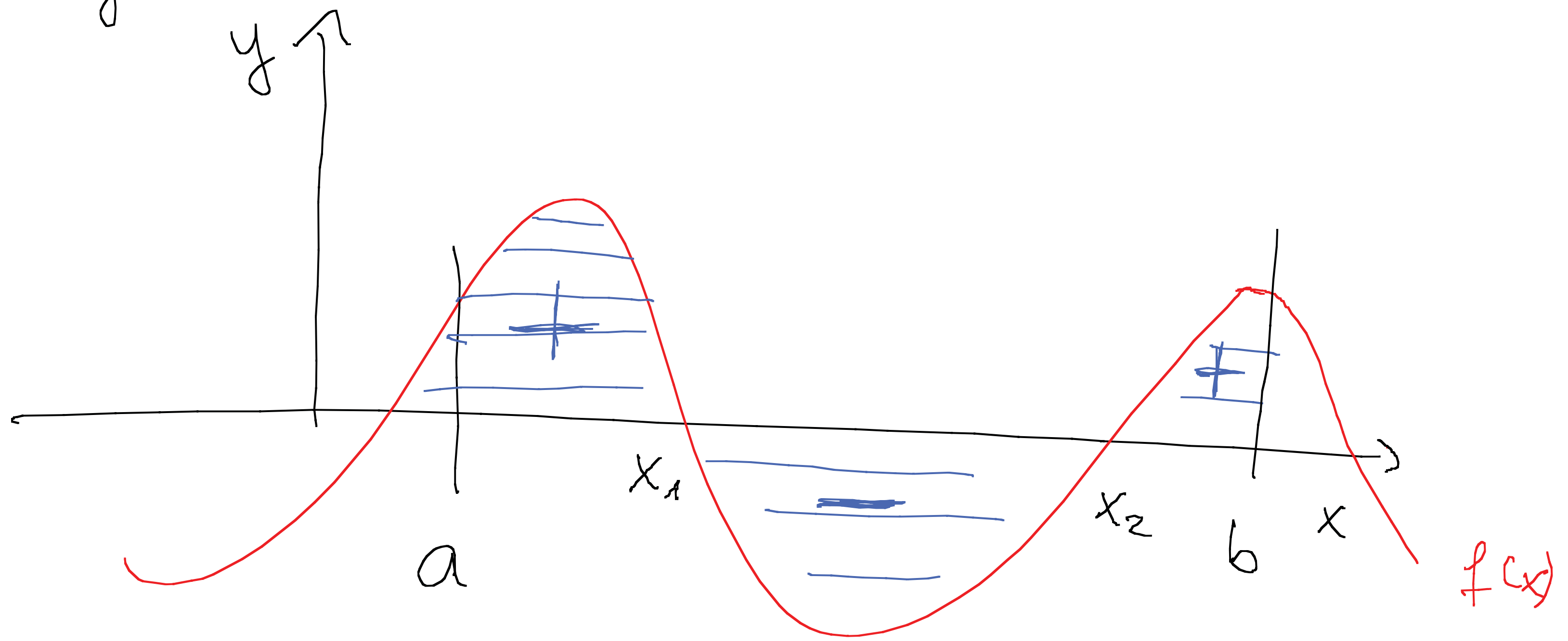
$$= \left| \left[-\ln|\cos x| \right]_{-1}^{0} \right|$$

$$= \left| -\ln|\cos 0| + \ln|\cos -1| \right|$$

$$= \left| -\ln 1 + \ln(0.54) \right|$$

$$= \left| -0 + \ln 0.54 \right| = \left| -0.616 \right| = 0.616 \text{ FE}$$

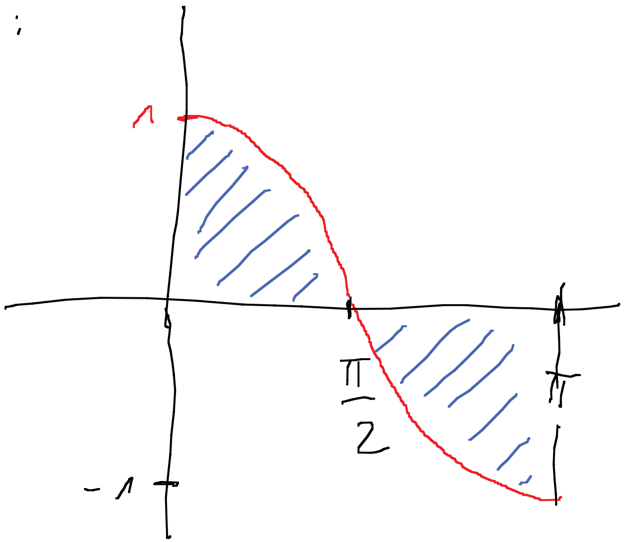
Folgende Situation:



$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Bp:

1)



$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx$$

Nullstellen von $\cos x$ auf $[0,\pi]$: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$

Flächeninhalt: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\right|$

bzw. $\displaystyle 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

(Symmetrien beachten!)

$$2\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\sin \tfrac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$= 2(1-0) = 2 \text{ FE}$$

2) $$\int_{-2,5}^{3} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8)\, dx$$

Flächeninhalt, der von der Kurve, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse im Abstand $-2{,}5$ und 3 eingeschlossen wird!

Nullstellen bestimmen

$x_1 = 1$ ist NST

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 : (x-1) = \underbrace{x^2 - 2x - 8}_{\text{Bestimmen von weiteren NST}}$$

$$- \quad x^3 - x^2$$

$$0 \quad -2x^2 - 6x$$

$$- \quad -2x^2 + 2x$$

$$0 \quad -8x + 8$$

$$- \quad -8x + 8$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2}$$

$x_2 = 4$ $\qquad$ $x_3 = -2$

liegt nicht im Integrationsintervall!

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x = \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$\int_{-2,5}^{3} f(x)\,dx : \left|\int_{-2,5}^{-2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right|$$

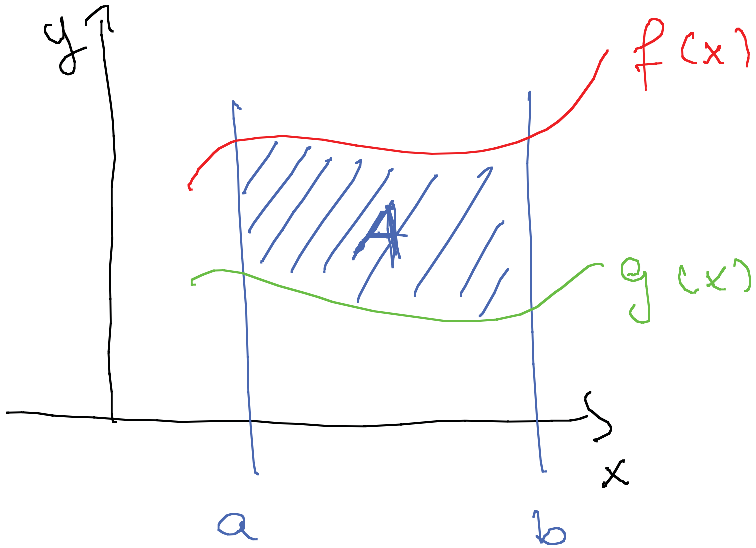
Als Fläche!

$$\left|\left[\underbrace{\frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x}_{*}\right]_{-2,5}^{-2}\right| + \left|\left[\;\overset{*}{\cdots\cdots}\;\right]_{-2}^{1}\right| + \left|\left[\;\overset{*}{\cdots\cdots}\;\right]_{1}^{3}\right|$$

$$= |-2.635| + |20.25| + |-14|$$

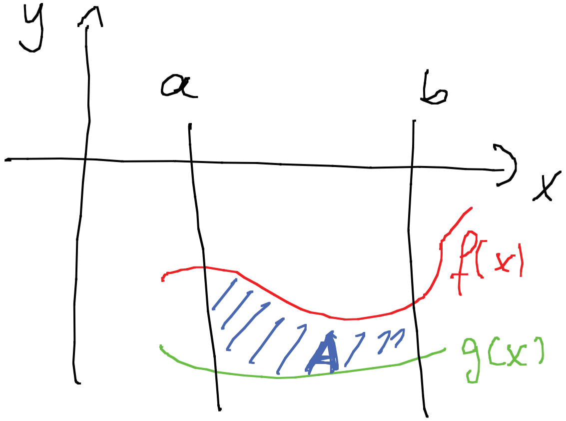
$$= 2.635 + 20.25 + 14 = 36.885 \text{ FE}$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

$f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$

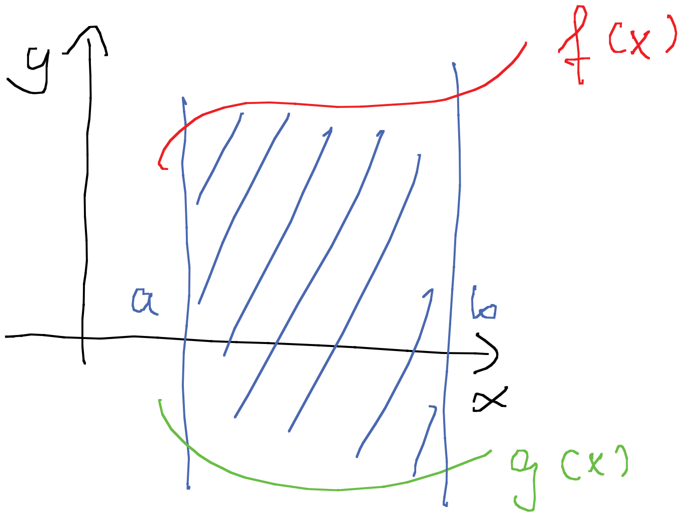


$f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$ $f(x), g(x) \leq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A_1$$

$$-A_1 - (-A_2) = -A_1 + A_2 = A_3$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = -A_2$$



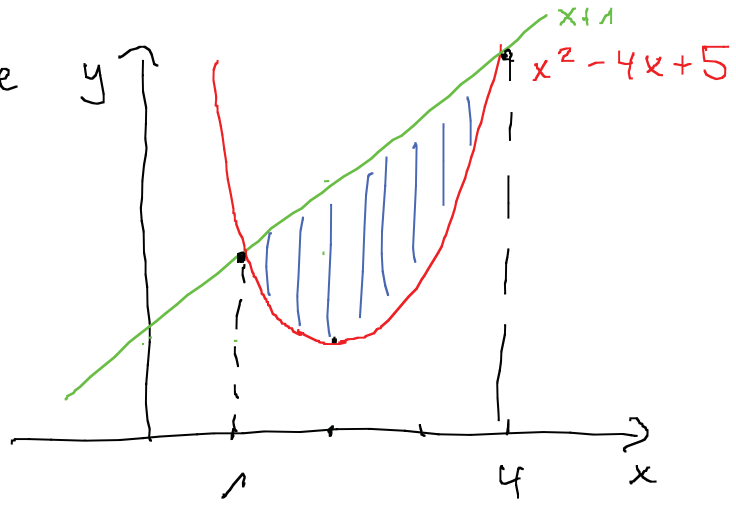
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = -A_2$$

$$A_1 - (-A_2)$$
$$= A_1 + A_2$$

Bp: Flächenstück berechnen zwischen $y = x^2 - 4x + 5$ und $y = x + 1$

Skizze



Schnittpunkte:

$$x^2-4x+5 = x+1 \quad | -x-1$$

$$x^2-5x+4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

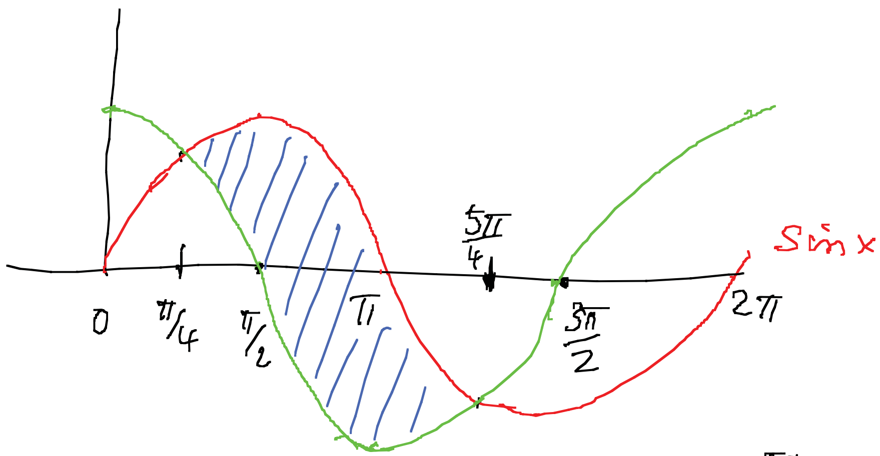
$$\int_1^4 x+1-(x^2-4x+5)\,dx$$

$$= \int_1^4 (x+1-x^2+4x-5)\,dx = \int_1^4 (-x^2+5x-4)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{80}{2} - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \ldots = \frac{27}{6} = 4.5 \text{ FE}$$

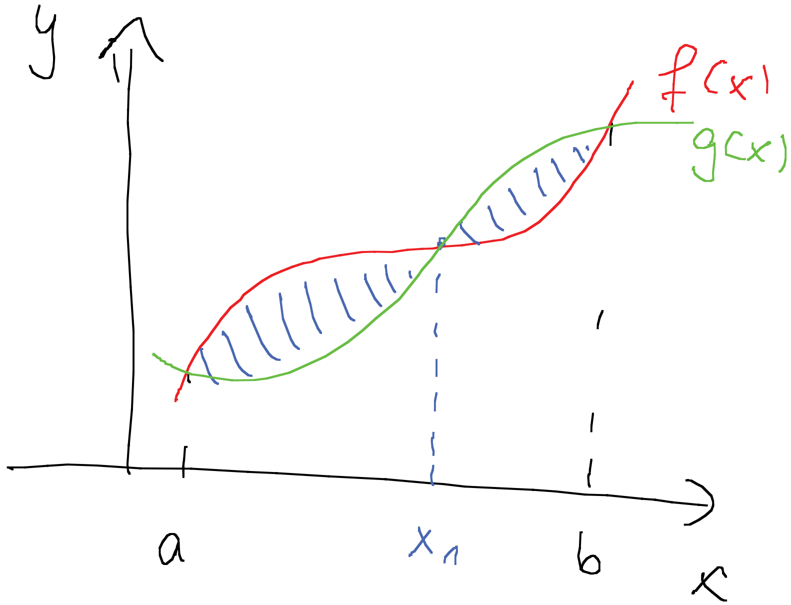
2) Flächenstück zwischen $y = \sin x$ und $y = \cos x$



$\cos x = \sin x$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \ldots = 2\sqrt{2} \text{ FE}$$

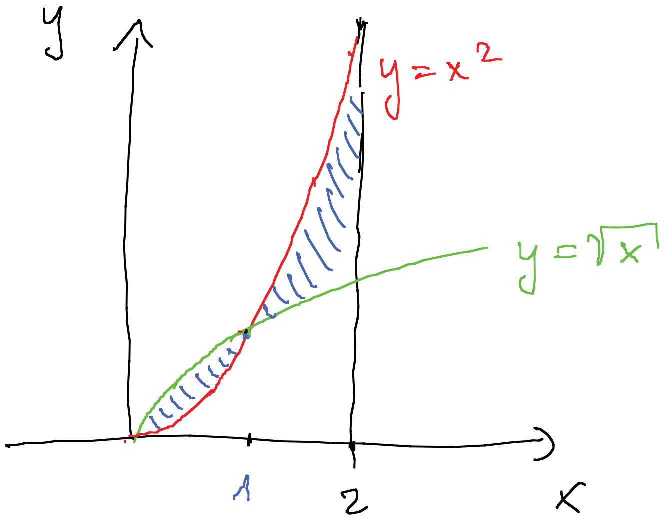
Nächster Fall:



Zerlegung in Teilflächen!

Schnittpunkt im Integrationsintervall berücksichtigen!

Bp:



$y = x^2 \qquad y = \sqrt{x} \qquad$ auf $[0,2]$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,dx$$

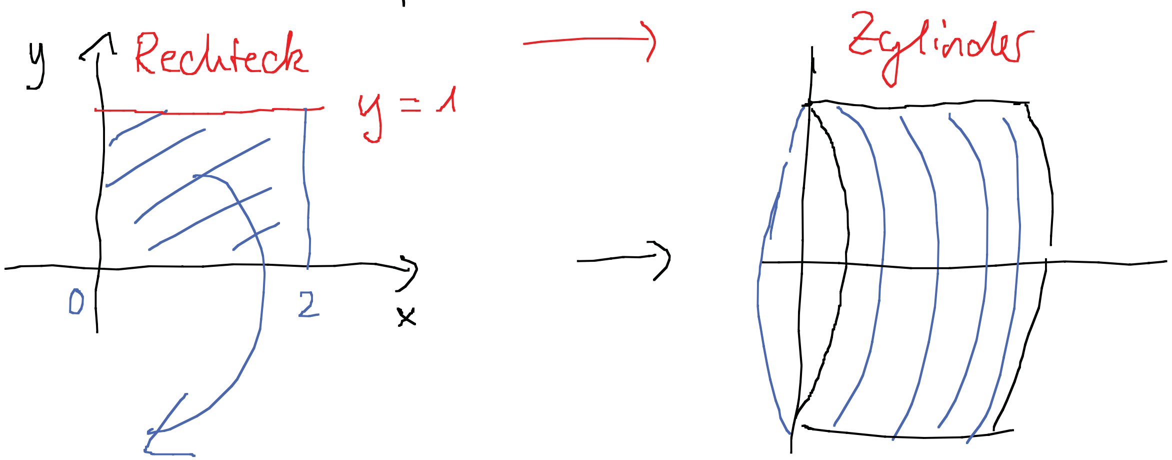
NR: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

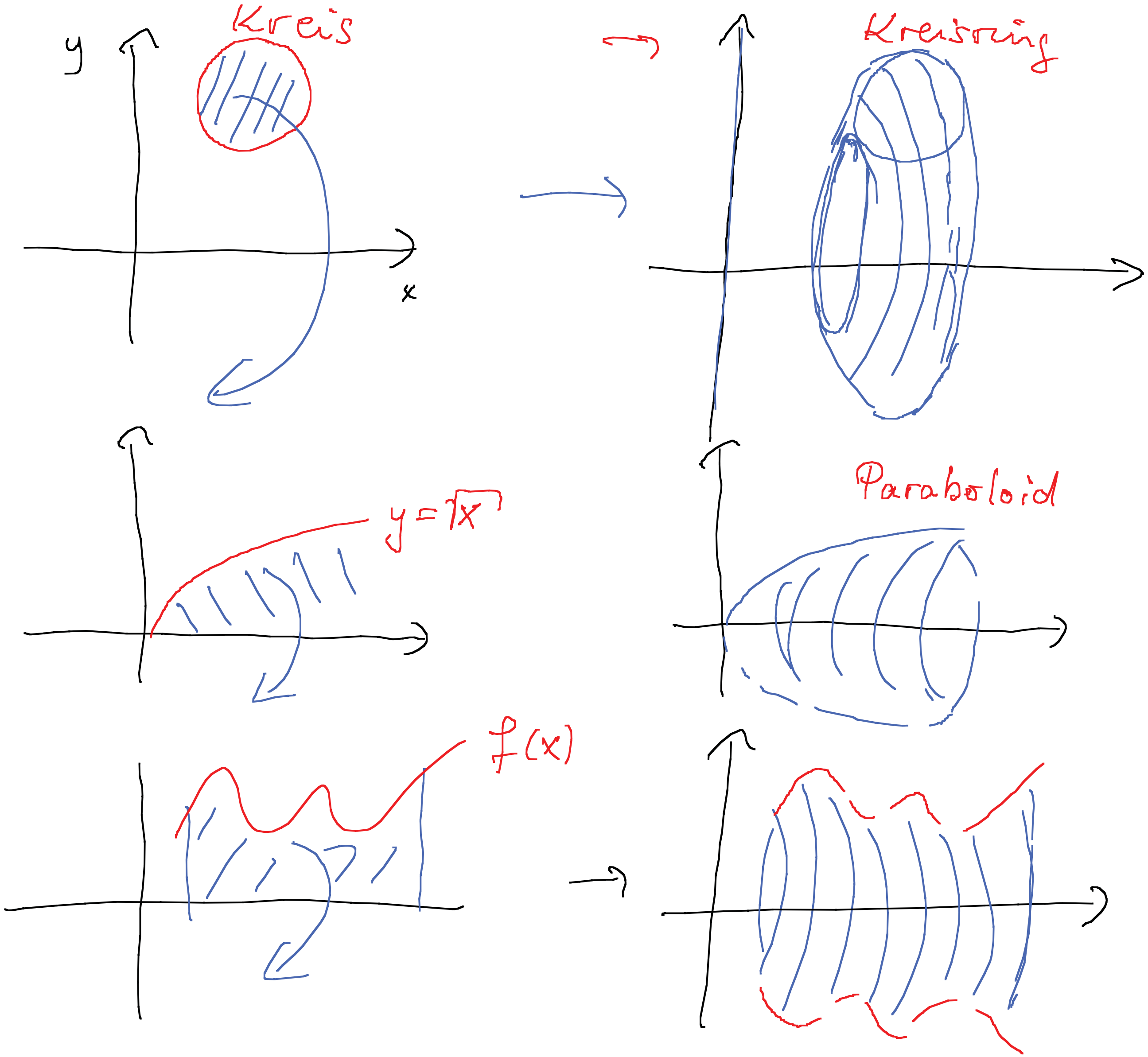
$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \ldots\ldots 1{,}447 \text{ FE}$$

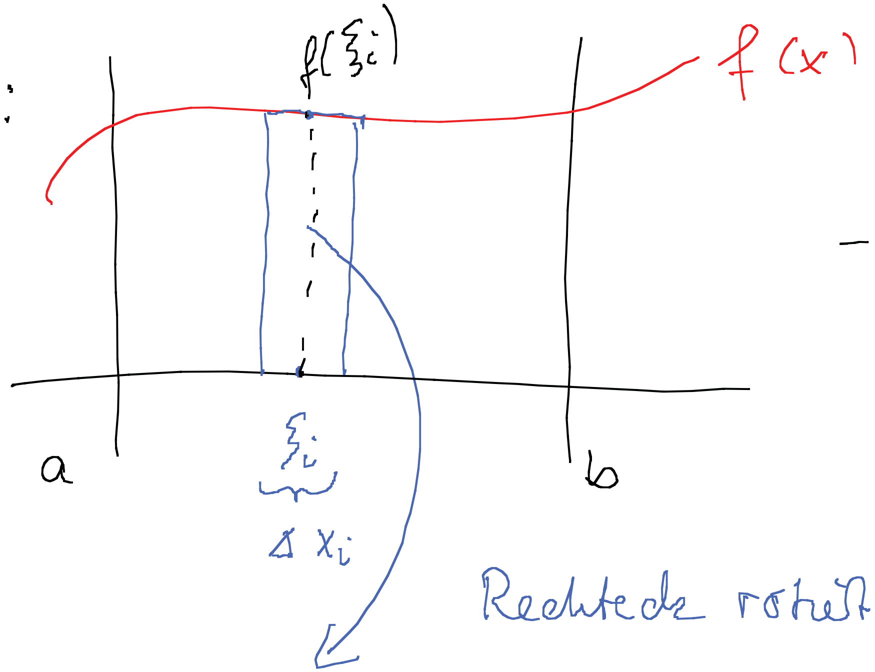
Rotationskörper

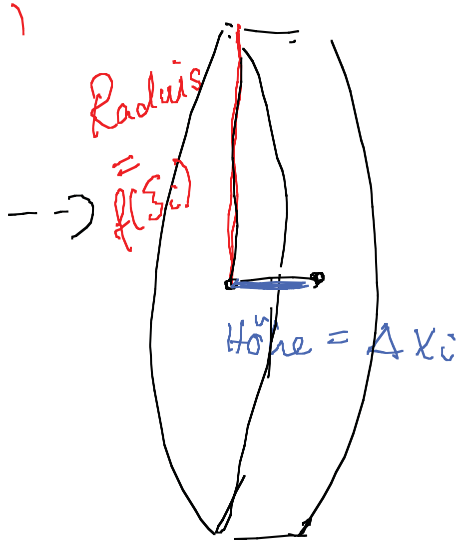




Kreis
y
x
Kreisring
$y=\sqrt{x}$
Paraboloid
$f(x)$

Herleitung:





Rechteck rotiert → Zylinderscheibe

$$\Delta V_i = \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

Volumen <u>einer</u> Teilscheibe

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot \Delta x_i$$

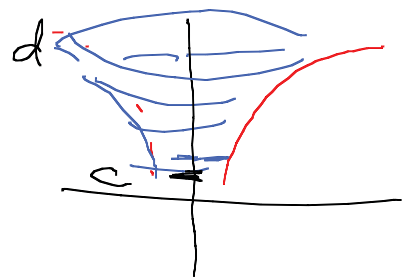
$\downarrow$ f sei stetig

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \left[f(\xi_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

$$= \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 \cdot dx$$

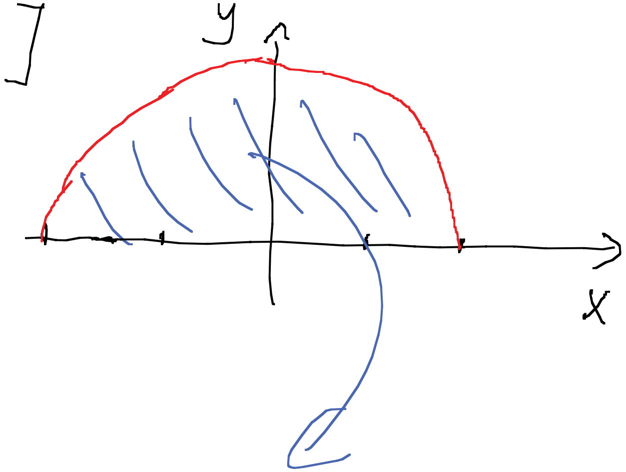
Rotation um die x-Achse

Volumen bei Rotation um die y-Achse :



$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,dy$$

Bp: 1) $y = \sqrt{4-x^2}$ auf $[-2,2]$



$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = \pi \cdot \frac{32}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$$