

## Übungsblatt 2

### Summen

#### Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

$$(i) \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n \cdot 2(n+1)}$$

$$(ii) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots - \frac{1}{100^2}$$

b) Berechnen Sie folgende Summen

$$(i) \sum_{k=1}^{10} (5k + 7m)$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{100} (3k + 5) \quad (\text{Hinweis: Was ist } \sum_{k=1}^{100} k ? \rightarrow \text{Formelsammlung oder geschickte Umformung!})$$

$$c) \text{ Man berechne } \sum_{k=1}^{201} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{204} \frac{1}{k-2}$$

#### Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

$$a) \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=3}^4 (k-2) \cdot i, \quad b) \sum_{k=1}^{10} \sum_{i=-5}^5 \ln(k^2 + k) \cdot i,$$

$$c) \sum_{m=2}^6 \sum_{n=0}^{39} (mn - 2m - 4)$$

#### Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis  $n=6$  auf und berechnen Sie damit  $(2-c)^6$ .

### Folgen

#### Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte  $g$  der Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$a1) a_n = \frac{1-5n^2}{1-8n^2} \quad a2) a_n = \left( 7 - \left( \frac{3}{4} \right)^n \right) \quad a3) a_k = \left( \frac{1-2k}{4k+2\sqrt{k}} \right)^3$$

$$a4) a_n = \frac{9 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n/2} + 50 \cdot 10^{2n-1}}$$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 30./31.10.12 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

b)  $a_n = n(\ln n - \ln(n+3))$  Hinweis: Benutzen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

c)  $a_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2} - \sqrt{2k-3}}$

d)  $a_k = \sqrt{k+2} + \sqrt{k+5}$

e)  $a_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$

### Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2}{1+4n} - \frac{n^2}{2n-2} \right)$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\binom{n}{2}}{n(n-2)} + \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{2n^2}{2n-1} \right) \right)$

### Aufgabe 2.6 Eulersche Zahl e (+)

Zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  eine alternative Formel für die Eulersche Zahl

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  ist!

HINWEIS: Binomischer Satz.

Testen Sie (mit Excel oder Maple) aus: Welche der beiden Formeln konvergiert schneller?

### Aufgabe 2.7 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration<sup>1</sup> eine näherungsweise Lösung der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a)  $x \ln x = 50$

b)  $\frac{1}{2}x - 5 = \ln x$

c)  $\sin(x) = 2(x+1)$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als  $\pm 0.1$  auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* Arten aus, nach x aufzulösen. Was funktioniert, was nicht?

<sup>1</sup> Bringen Sie also die Gleichung in eine Form  $x = g(x)$  (mehrere Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte  $x_0$  und bilden Sie die rekursive Folge  $x_1 = g(x_0)$ ,  $x_2 = g(x_1)$ ,  $x_3 = \dots$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 30./31.10.12 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

### Aufgabe 2.8 $O()$ -Notation

- (a) Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges"  $O(B)$  zu.  
 (b) Schreiben Sie die Folgen in der Form "führender Term +  $O(B)$ ".

|       | Folge                                                | (a)      | (b)             |
|-------|------------------------------------------------------|----------|-----------------|
|       | $2n^3 - n^2$                                         | $O(n^3)$ | $2n^3 + O(n^2)$ |
| (i)   | $120n^5 + n^8 - n^7$                                 |          |                 |
| (ii)  | $n + 3n^{-2} - 2n \log(n)$                           |          |                 |
| (iii) | $\frac{n^4 + n^2}{n + 5}$                            |          |                 |
| (iv)  | $\frac{n^4 + n^2}{n - 1} - \frac{n^4 + 2n^2}{n + 1}$ |          |                 |
| (v)   | $2n \cdot \sin(n) + n^2 \cos(n)$                     |          |                 |
| (vi)  | $n \lg(n) \cdot (-1)^n + 4n$                         |          |                 |

### (noch) Zahlssysteme

#### Aufgabe 2.9 Löse nach x auf!

- (a)  $e^x = 2e^{-x+2}$                       (b)  $\ln(x) + \ln(x + 2) = 0$

#### Aufgabe 2.10 Modulare Arithmetik / Prüfziffern

- a) Berechnen Sie möglichst effizient und ohne Taschenrechner  
 (i)  $(99 \cdot 236) \bmod 5$                       (ii)  $(27 + 82 \cdot 13) \bmod 4$                       (iii)  $(9^{125} + 567 \cdot 8 - 1) \bmod 8$   
 (iv)  $(2^{50} + 38) \bmod 4$                       (v)  $(2^{50} + 38) \bmod 7$
- b) Welche Prüfziffer p macht 0-9380-2191-p zu einer gültigen ISBN ?
- c) Es wird die ISBN 0-8380-2191-p eingegeben (mit dem p aus Teil b)), also ein Einzelfehler an der zweiten Stelle. Wird der Fehler erkannt?
- d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-8x80-2191-p wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?