

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Summenregel

Produktregel

Quotientenregel

Kettenregel

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Summenregel

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y' &= (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' \\ &= f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)\end{aligned}$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Produktregel

$$y = f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Kettenregel

$$y = f(g(x)) = f \circ g$$

$$\text{mit } z = g(x) \text{ und } v = f(z)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f'(z) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Ableitung der Umkehrfunktion einer Funktion

Geg.: $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Ableitung einer in Parameterform
gegebenen Funktion $x(t), y(t)$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad , \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Das Differenzial

Geht man von x_0 um einen kleinen aber endlichen Schritt Δx weiter, so ist der Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$, während auf der Tangente für den Wert $x_0 + \Delta x$ der Wert $f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ ablesbar ist. Man hat f durch eine lineare Funktion ersetzt.

Linearisierung einer Funktion

Das Differenzial

Der Ausdruck $dy = f'(x)dx$ heißt das *Differenzial* der Funktion $y = f(x)$

Statt dy schreibt man häufig df

Interpretation: Zuwachs der Tangentenordinate für den Argumentzuwachs Δx

Das Differenzial

Ökonomische Interpretation
(siehe Blatt 20) :

Für $dx=1$ ergibt sich der Zuwachs von
ökonomischen Funktionen bei Änderung
der Einsatzmengen um eine Einheit, z.B.
Grenzkosten, Grenzgewinne,....

Einschub: Tangentenverfahren von Newton

Numerisches Verfahren zur Berechnung von Nullstellen und von Funktionswerten, die nicht mit den besprochenen Methoden gelöst werden können, insbesondere wenn andere Funktionen als Polynome vorliegen.

Einschub: Höhere Ableitungen

Da die Ableitung einer Funktion selbst wieder eine Funktion ist, so ist diese, falls die Voraussetzungen erfüllt sind, selbst wieder differenzierbar. Auf diese Weise gelangt man zu Ableitungen höherer Ordnung.

Interpretation der ersten und zweiten Ableitung

Die erste Ableitung einer Funktion gibt die Steigung der Funktion an, d.h. die *Änderung der Funktionswerte* bei Änderung der dazugehörigen Argumente.

Die zweite Ableitung gibt dann die *Änderung der Steigung* bei Änderung der Argumente an, ist also ein Maß für die *Krümmung* der Funktion

Wichtige Sätze der Differenzialrechnung

- 1) *f sei auf einem abgeschlossenen Intervall definiert. Ein absolutes Extremum wird nur auf dem Rand angenommen, sonst handelt es sich um ein relatives Extremum.*
- 2) *Satz von Fermat: Besitzt eine differenzierbare Funktion ein relatives Extremum, dann ist die erste Ableitung an dieser Stelle gleich Null*

(Achtung: Aussage des Satzes von Fermat ist nicht umkehrbar!)

Wichtige Sätze der Differenzialrechnung

3) *Satz von Rolle: Für eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige und im Innern differenzierbare Funktion gilt: falls $f(a)=f(b)$, dann existiert ein $\zeta \in (a,b)$ mit $f'(\zeta)=0$*

4) *Mittelwertsatz der Differenzialrechnung: Für eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige und im Innern differenzierbare Funktion gilt: es existiert ein*

$$\zeta \in (a,b) \text{ mit } f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Charakteristische Kurvenpunkte

Das Verhalten einer Funktion kann im Wesentlichen durch die *erste und zweite Ableitung* und daraus zu berechnenden charakteristischen Kurvenpunkten beschrieben werden.

Bedeutung der ersten Ableitung

Eine Funktion ist monoton wachsend, wenn beim Durchgang durch den Kurvenpunkt x_0 die erste Ableitung positiv ist, d.h. $f'(x_0) > 0$

Eine Funktion ist monoton fallend, wenn beim Durchgang durch den Kurvenpunkt x_0 die erste Ableitung negativ ist, d.h. $f'(x_0) < 0$

Bedeutung der zweiten Ableitung

Eine Funktion ist linksgekrümmt, wenn beim Durchgang durch den Kurvenpunkt x_0 die zweite Ableitung positiv ist, d.h. $f''(x_0) > 0$

(die Tangente dreht sich im positiven Drehsinn)

Eine Funktion ist rechtsgekrümmt, wenn beim Durchgang durch den Kurvenpunkt x_0 die zweite Ableitung negativ ist, d.h. $f''(x_0) < 0$

(die Tangente dreht sich im negativen Drehsinn)

Relative oder lokale Extremwerte

Hinreichende Bedingung:

f besitzt in x_0 ein *lokales oder relatives Maximum*, genau dann wenn

$$f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)<0$$

f besitzt in x_0 ein *lokales oder relatives Minimum*, genau dann wenn

$$f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)>0$$

Wendepunkte

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangente ändert, heißen *Wendepunkte*

Punkte mit Änderung der Kurvenkrümmung

Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen *Sattelpunkte*

Hinreichende Bedingung:

f besitzt in x_0 einen *Wendepunkt*, genau dann wenn

$$f''(x_0)=0 \text{ und } f'''(x_0)\neq 0$$

Kurvendiskussion - Schema

- 1) Definitionsbereich/Wertebereich**
- 2) Symmetrie**
- 3) Nullstellen**
- 4) Asymptoten**
- 5) Pole**
- 6) Ableitungen (in der Regel bis zur Ordnung 3)**
- 7) Extremwerte**
- 8) Wendepunkte**
- 9) Zeichnung des Graphen**

Extremwertaufgaben Teil 1

Problem meist aus dem Bereich der praktischen Anwendungen gegeben: Suche nach einem Extremwert

Die eigentliche Funktionsgleichung muss erst noch aufgestellt werden

Ist dies geschehen, so berechnet man die Extremwerte dieser Funktion

(Achtung: Extremwert kann auch auf dem Rand angenommen werden!)

Extremwertaufgaben Teil 1

Beispiele:

- **Quadrat mit einbeschriebenem Rechteck**
- **Dosenprobleme**