

Diese Klausur vermittelt Ihnen einen Eindruck über möglichen Umfang und mögliche Themenauswahl. Es können aber auch durchaus andere Themen in den einzelnen Aufgaben behandelt werden. Eine Themenabgrenzung findet zum Ende der Vorlesung statt.

Bearbeiten Sie diese Aufgaben möglichst selbstständig, so dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen beim Abnahmetermin vorzutragen und Fragen zu Ihren Ausführungen zu beantworten.

Aufgabe 1 (modulare Arithmetik, Grenzwerte)

a) Berechnen Sie $7^{98} \bmod 5$

b) Berechnen Sie die letzte Dezimalziffer von 7^{99} , indem Sie den Rest berechnen, den Sie bei Division durch eine passende Zahl erhalten (Modulo)

c) Berechnen Sie folgenden Grenzwert für $n \in \mathbb{N}$:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2} \right)$$

d) Berechnen Sie folgenden Grenzwert für $x \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Aufgabe 2 (Ungleichungen/Definitionsbereich)

a) Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung an: $|x - 4| + |x| \leq 5$

b) Geben Sie den Definitionsbereich folgender Funktion an:

$$f(x) = \frac{3 \ln(4x + 2)}{\sqrt{7 - 2x}}$$

Aufgabe 3 (Taylorentwicklung/Extremwerte)

- a) Berechnen Sie das **Taylorpolynom 3. Grades $T_3(x)$** für $f(x) = \sqrt{x}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0=1$. Berechnen Sie mit diesem Polynom näherungsweise $\sqrt{1,15}$ und bestimmen Sie die Genauigkeit mit Hilfe der **Restgliedabschätzung von Lagrange**.
- b) Eine Kiste aus einem Material X mit quadratischer Grundfläche ohne Deckel besteht aus 4 Seitenteilen und einem Boden. Die Seitenteile sind doppelt so dick wie der Boden. Welche Abmessungen hat die Kiste, wenn sie bei einem Fassungsvermögen von 16 Litern möglichst wenig wiegen soll? Da Sie weder die Wandstärke noch die Art des Materials kennen, sollten Sie die gewichtete Oberfläche nehmen, also die Seitenteile doppelt berücksichtigen.

Aufgabe 4 (Matrizen/Lineare Gleichungssysteme)

- a) Durch die folgenden Tabellen werde der Materialbedarf für einen zweistufigen Produktionsprozess beschrieben. Dabei werden aus 4 Rohstoffen über 3 Zwischenprodukte 2 Endprodukte hergestellt.

Rohstoffbedarf für die Zwischenprodukte: *Zwischenproduktbedarf für Endprodukte:*

	Z1	Z2	Z3
R1	0,5	0,8	0,6
R2	0,1	0,01	0,2
R3	0,04	0,01	0,3
R4	0	0,1	0,2

	E1	E2
Z1	45	0
Z2	0	71
Z3	50	40

- Zeichnen Sie zur Darstellung der Verflechtung einen **Gozintographen** für diesen Produktionsprozess
 - Berechnen Sie mit Hilfe der **Matrizenrechnung** den Rohstoffbedarf für eine Produktion von 10000 Einheiten E1 und 20000 Einheiten E2.
- b) Um die Stadt A, die an einer geraden Straße liegt, die durch die Punkte P(-1;0) und Q(3;0) verläuft, soll eine Umgehungsstraße gebaut werden, deren Verlauf durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades beschrieben wird. Die Umgehungsstraße soll in Q tangential in die alte gerade Straße münden (d.h. die Steigungen von alter und neuer Straße stimmen in Q überein). In R (0;-3) berührt sie ein Feld, das parallel zur geraden Durchfahrtsstraße verläuft. Machen Sie sich zunächst eine aussagekräftige Skizze und stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für eine Berechnung der Funktion mit dem Gauß'schen Lösungsverfahren auf. Führen Sie den Algorithmus durch.