LV 23.10.2013

Summe: fortgesetztes Addieren $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$ Sigma

Produkt: " Multipliz. $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

$a_k = k$: $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ "n Fakultät"

zu Binomialkoeffizient

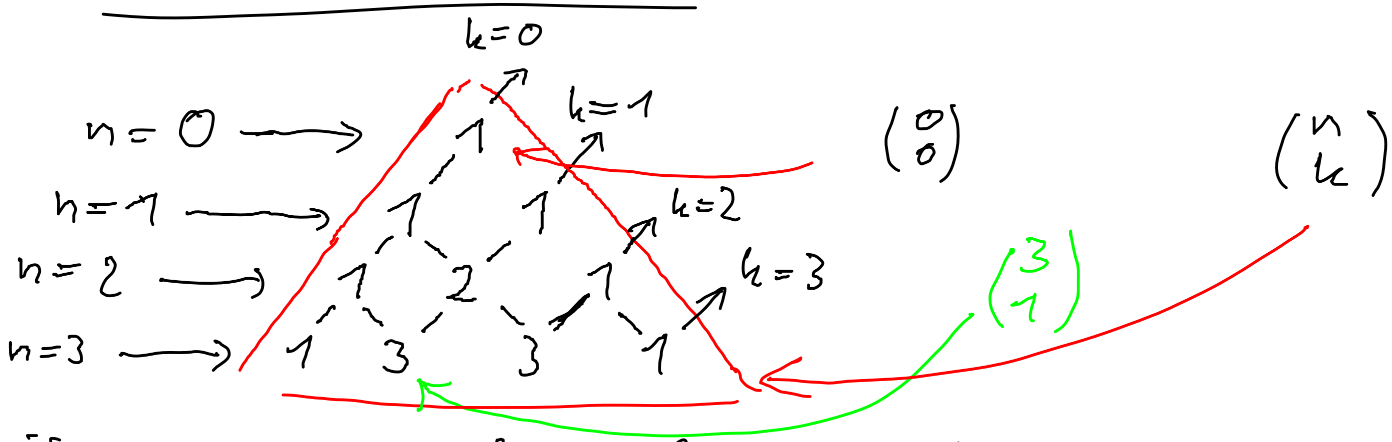
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{1 \cdot \cancel{n!}} = 1 = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!}$$

Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=}$ n "nCr" k

Additionstheorem $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\Rightarrow$ Pascal'sche Dreieck

Pascal'sche Dreieck



__Übung:__ Erweitern Sie Pasc. Dr. bis $n=7$ und berechnen Sie damit $(a+b)^7$ nach dem Binomischen Satz

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} a b^2 + \binom{3}{2} a^2 b + \binom{3}{3} a^3$$

$$= 1 b^3 + 3 a b^2 + 3 a^2 b + 1 a^3$$

Lsg. Übung

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$n = 7 \longrightarrow$ 1 7 21 35 35 21 7 1

$\uparrow$ $\binom{7}{0}$ $\uparrow$ $\binom{7}{1}$ ... $\uparrow$ $\binom{7}{5}$ $\uparrow$ $\binom{7}{6}$ $\uparrow$ $\binom{7}{7}$

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{7}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= 1b^7 + 7ab^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3$$

$$+ 21a^5b^2 + 7a^6b + 1a^7$$

Geg. die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wieviele Teilmengen? Antwort: $\underline{\underline{2^n}}$

Anleihe Kombinatorik: Es gibt $\binom{n}{k}$ ~~Teilmen~~ k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$

Alle Teilmengen: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = \underline{\underline{2^n}}$

Binom. Satz mit $a=1$, $b=1$

Zahlenfolgen

$n \in \mathbb{N} \longmapsto a_n \in \mathbb{R}$

ausgeschrieben $a_1, a_2, a_3, \dots$

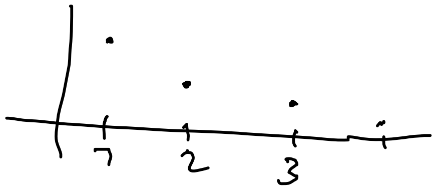
Beispiel

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ $\qquad a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

streng monoton fallend

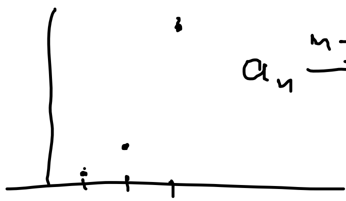
n.o.b. $K = 1$

n.u.b. $k = 0$



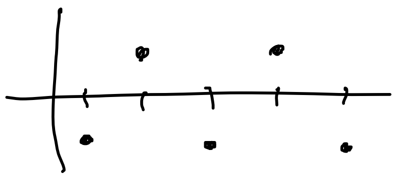
2) $a_n = 2^n$, $(a_n) = 2, 4, 8, 16, \dots$ $\qquad a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

n.u.b. $(k = 0)$, $\uparrow$ (streng)



3) $a_n = (-1)^n$, $(a_n) = -1, +1, -1, \dots$

n.o.b., n.u.b.



4) <u>rekursive Folge</u>

$a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{1}{4}$ d.h. $(a_n) = \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{89}{256}, \dots$

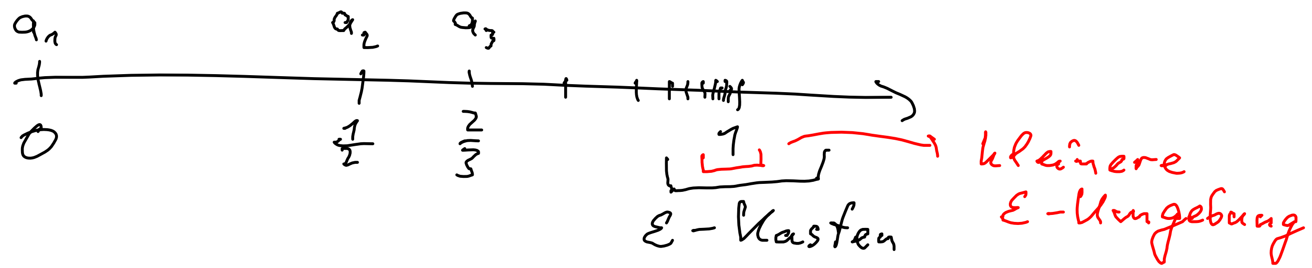
5) konstante Folge

$a_n = 3 \;\; \forall n$ $\qquad (a_n) = 3, 3, 3, \dots$

<u>Grenzwert einer Folge</u>

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \frac{999}{1000}, \dots \frac{9999}{10000}, \dots$



g heißt Grenzwert $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - g| < \varepsilon$
f. $n \geq n_0$

S3-1 Eine konvergente Folge ist beschränkt

$\Leftrightarrow$ Wenn konvergent, dann beschränkt

<u>Umkehrung</u>: Wenn unbeschränkt, dann divergent

$$\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

<u>Beispiele für Grenzwerte</u>

1) $a_n = \frac{1}{n}$ (eine der fundamentalen Nullfolgen)

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ denn: Wenn $g = 0$ G.W.

$|a_n - g| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Wähle $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

Dann gilt $\forall n \geq n_0$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$ q.e.d.

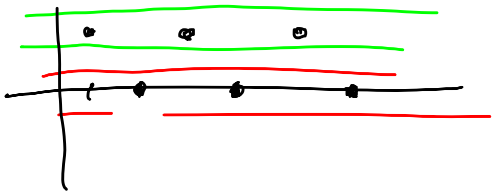
2) $a_n = \frac{2n-1}{3n} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Erweitern mit $1/n$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

3) $a_n = 1-(-1)^n$, $(a_n) = 2, 0, 2, 0, \dots$



(a_n) ist divergent

4) $a_n = n^2+5$, $(a_n) = 6, 9, 14, \dots$

a_n ist nach S3-2 divergent, weil unbeschränkt

Rechenregeln Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \text{ op } b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \text{ op } \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

op $= +, -, \cdot, \div, ()^r$

Beispiel $\dfrac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7} = \dfrac{-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}$

g.P.i.N. n^2

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{-2+0-0}{8-0+0} = -\frac{1}{4}$$

Übung $\dfrac{2n^2+27}{4n^3+5} \xrightarrow{n\to\infty} ?$

Lsg. $\dfrac{2n^2+27}{4n^3+5} = \dfrac{\frac{2}{n}+\frac{27}{n^3}}{4+\frac{5}{n^3}}$

g.P.i.N.
durch n^3 div.

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0}{4+0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+27}{4n^3+5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{n}+\frac{27}{n^3}}{4+\frac{5}{n^3}}\right) = \frac{0+0}{4+0} = 0$$