V 30.10.2013

Zahlenfolgen

$$0 \cdot \infty$$

z.B. $\frac{1}{n} \cdot n \xrightarrow{n\to\infty} 1$

andererseits $\frac{1}{n} \cdot n^2 = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Ü 16 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^3 - n}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(7n - \frac{1}{n})}{\cancel{n^2}(3 + \frac{5}{n^2})} = \frac{\infty - 0}{3+0} = \underline{\underline{\infty}}$

Falscher Weg:

$\frac{\infty - \infty}{\infty + 5}$ unentscheidbar

2) $\left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{n^2}(7 - \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(3 + \frac{2}{n^2})}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{7-0}{3+0}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{49}{9}}}$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{1+\frac{1}{n}}-\frac{n^2}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\infty}{1}-\frac{\infty}{1}\right) \lightning$$

unentscheidbar

Neuer Ansatz: <u>Hauptnenner</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3(n-1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}-n^3-\cancel{n^4}-n^3}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}\cdot(-2n)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\frac{-2\cdot\infty}{1-0}=\underline{\underline{-\infty}}$$

4) $$\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot10^k+6\cdot10^{2k}}{0.4\cdot10^{k-3}-\underbrace{20\cdot10^{-2}}_{0.2}\cdot10^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{10^{2k}}(75\cdot10^{k-2k}+6\cdot10^{2k-2k})}{\cancel{10^{2k}}(0.4\cdot10^{k-3-2k}-0.2)}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot10^{-k}+6}{0.4\cdot10^{-k-3}-0.2}=\frac{0+6}{0-0.2}=\underline{\underline{-30}}$$

$$10^{-k}=\frac{1}{10^k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

Landau'sche O()-Notation

A ist von Ordnung $\mathcal{O}(B)$ $\Leftrightarrow$ Quotient $\frac{a_n}{b_n}$ beschränkt

$\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{O}(B)$

Anmerkungen: Die Folge $B = (b_n)$ sollte so gewählt werden, dass sie 1) möglichst einfach ist
(also z.B. n^3 statt $3n^3 + 5n^2$)

2) möglichst "billig" ist
(also z.B. $b_n = n^3$ statt $b_n = n^5$)

Beispiele

1) $(a_n) = (2n^3 - n^2) \in \mathcal{O}(n^3)$, denn $\frac{2n^3 - n^2}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

(es gilt auch $(a_n) \in \mathcal{O}(n^4)$, denn $\frac{2n^3 - n^2}{n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
aber das ist nicht das "billigste" (b_n))

Folgende Reihung in Informatik relevant

$$\mathcal{O}(1) < \mathcal{O}(\ln(n)) < \mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(n \ln(n)) < \mathcal{O}(n^2)$$

$< \dots \leq \mathcal{O}(2^n)$

Was heißt dabei $\mathcal{O}(\ln(n)) < \mathcal{O}(n)$?

Das Verhältnis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Anleihe Kap. 5
L'Hospital

führt auf ∞, d.h. die Folge (n) wächst stärker als proportional zur Folge $(\ln(n))$

Zur Übung

(i) Teil (a) $\frac{2n^3 - n^2}{n^3} = \frac{\cancel{n^3}\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} 2 - 0$,

also beschränkt

also $2n^3 - n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$

Teil (b): $\frac{a_n - 2n^3}{n^2} = \frac{\cancel{2n^3} - n^2 - \cancel{2n^3}}{n^2} = -1$,

also beschränkt

also ist $a_n - 2n^3 \in \mathcal{O}(n^2)$

(ii) a) $a_n = 7n^5 + \boxed{26n^6} \in \mathcal{O}(n^6)$ führende Term

weil $\frac{7n^5 + 26n^6}{n^6} = \frac{7 \cdot \frac{1}{n} + 26}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 26$

b) $a_n - 26n^6 = 7n^5 \in \mathcal{O}(n^5)$, daher

$a_n = 26n^6 + \mathcal{O}(n^5)$

(iii) a) $a_n = n + \boxed{3n^2} - 2n\log(n)$

$a_n \in \mathcal{O}(n^2)$

$\mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(n\log n) < \mathcal{O}(n^2)$

weil: $\frac{n + 3n^2 - 2n\log(n)}{n^2} = \frac{1}{n} + 3 - 2\frac{\log(n)}{n}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0 + 3 - 2\cdot 0$

b) $a_n - 3n^2 = n - 2n\log(n) \in \mathcal{O}(n\log(n))$

also $a_n = 3n^2 + \mathcal{O}(n\log(n))$

(iv) $a_n = \frac{n^4 + n^2}{n + 5}$

a) Hypothese: $\mathcal{O}(n^3)$

weil: $$\frac{\left(\frac{n^4+n^2}{n+5}\right)}{n^3} = \frac{n^4+n^2}{n^3(n+5)} = \frac{n^4+n^2}{n^4+5n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

also beschränkt, also Hyp. o.k. $a_n \in \mathcal{O}(n^3)$

b) Der führende Term ist $\boxed{1\cdot n^3}$

$$a_n - 1\cdot n^3 = \frac{n^4+n^2}{n+5} - n^3 = \frac{\cancel{n^4}+n^2 - n^3(\cancel{n}+5)}{n+5}$$

$$= \frac{n^2-5n^3}{n+5} = \frac{\cancel{n}(n-5n^2)}{\cancel{n}(1+\frac{5}{n})} \in \mathcal{O}(n^2)$$

weil: $$\frac{a_n - 1n^3}{n^2} = \frac{n-5n^2}{(1+\frac{5}{n})\cdot n^2} = \frac{n-5n^2}{n^2+5n}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-5}{1+0} = -5$$, also beschränkt

also ist $a_n = n^3 + \mathcal{O}(n^2)$