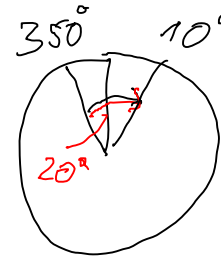


V 6.11.2013

$$350^\circ + 20^\circ = 370^\circ \hat{=} 10^\circ$$

Geometrie, Winkel



Rechnen mit mod:

"hoch": $(71^{203}) \bmod 5 = (1^{203}) \bmod 5 = \underline{\underline{1}}$

Man beachte: "kürzen" ist nicht erlaubt

Denn: $8 \equiv 20 \pmod{6}$

$$2 \cdot 4 \equiv 5 \cdot 4 \pmod{6}$$

$| : 4$ ist NICHT erlaubt

denn $2 \not\equiv 5 \pmod{6}$

Weiteres Beispiel

$$8 + p = 2 \pmod{11} \quad | +3$$

Welches p
löst diese Gl. ?

$$\Leftrightarrow 8 + 3 + p = 2 + 3 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 11 + p = 5 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow p = 5 \pmod{11}$$

Prüfziffer zu ISBN 3-446-19873-p :

$$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \underline{250} + p = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{220} + \cancel{22} + 8 + p = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 8 + p = 0 \pmod{11} \quad | +3$$

$$\Leftrightarrow \underline{p = 3} \pmod{11}$$

Übung zu 3-446-~~9~~1873-3

$$\underline{250} + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 - 5 \cdot 9 + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$\underline{261} = 0 \pmod{11}$$

$$\cancel{220} + \cancel{33} + 8 = 0 \pmod{11}$$

$$8 = 0 \pmod{11}$$

ungültige ISBN



Restklasse mit TR:

$$261 : 11 \approx \underline{23.7} \dots$$

$$261 - 11 \cdot 23 = \underline{\underline{8}}$$

Übung mit x und Zahlendreher

x-446-91873-3 wann gültige ISBN

$$10 \cdot x + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + \dots + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x + 231 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10x + \cancel{220} + 11 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10x = 0 \pmod{11}$$

Aufwort: Nur bei $x=0$ und
Zahlendreher kommt (fälsch-
licherweise) eine gültige ISBN
heraus

x	$10x \pmod{11}$
0	0
1	10
2	$20 = 9$
3	$30 = 8$
4	$40 = 7$
$\vdots$	
9	$90 = 2$

Funktionen



⇒ keine Funktion
(höchstens Relation)



⇒ Funktion

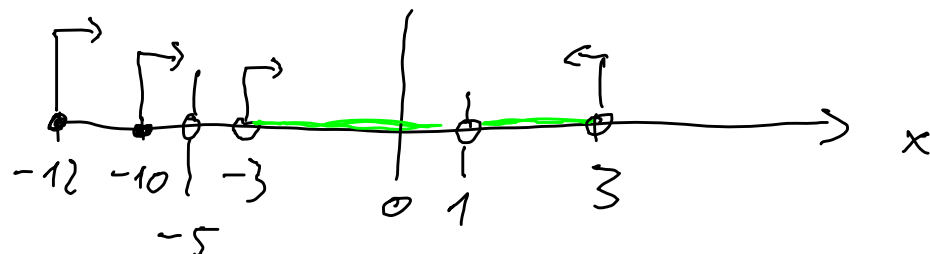
ü Def. ber für $f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\sqrt{x+12}}{(x-1)(x+5)}$

① $x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -10$

② $9-x^2 > 0 \Leftrightarrow 9 > x^2 \Leftrightarrow 3 > |x| \Leftrightarrow x \in]-3, 3[$

③ $x+12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -12$

④ $(x-1)(x+5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -5$

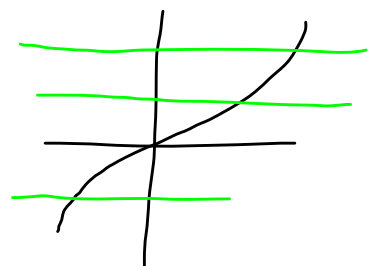


$$D =]-3, 3[\setminus \{1\}$$

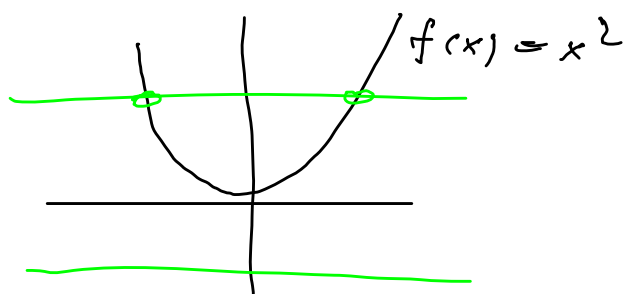
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3 \wedge x \neq 1\}$$

Injektiv oder bijektiv

Jede horizontale hat höchstens einen Schnittpunkt mit $f(x)$

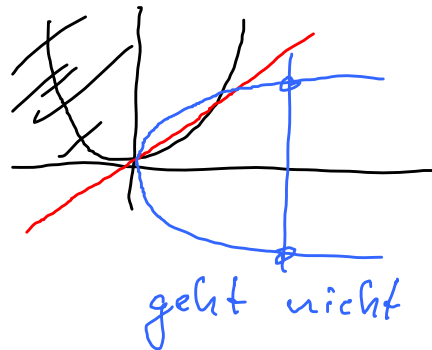


injektiv

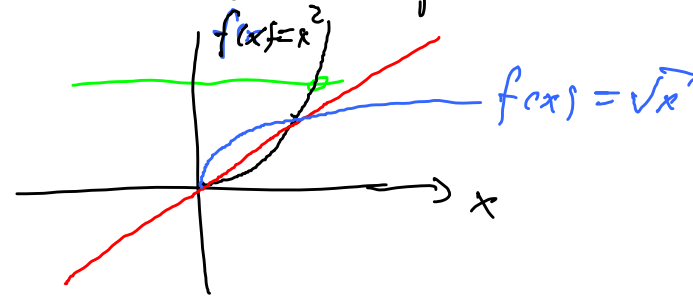


nicht injektiv

Beispiel: $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv



$\Rightarrow$
passend
machen



$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : f(x) = x^2$ ist bijektiv

Umkehrfunktion: $y = f(x) = x^2$ nach x
auflösen $\Rightarrow \sqrt{y} = x$

d. h. $g(y) = \sqrt{y}$ ist Umkehrfunktion

zu $f(x) = x^2$

① D, W und Umkehrfkt v. $f(x) = 2x + 1$

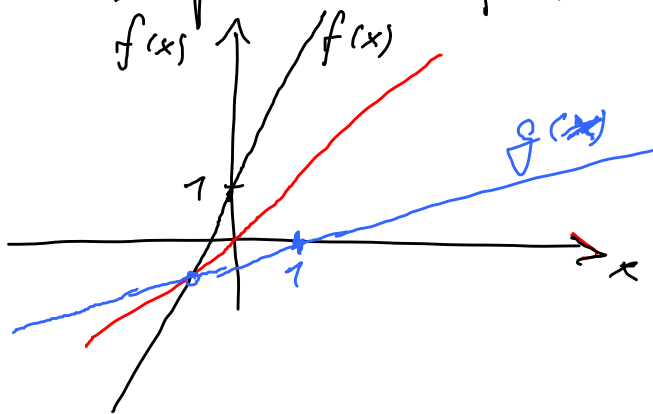
$$D = \mathbb{R}$$

$$W = \mathbb{R}$$

$$y = 2x + 1 \quad | -1$$

$$y - 1 = 2x$$

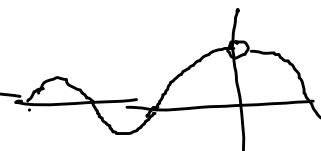
$$\frac{y-1}{2} = x \quad \text{d.h. } g(y) = \frac{y-1}{2} \quad \text{ist die Umkehrfunktion zu } f(x)$$



Grenzwert Funktion

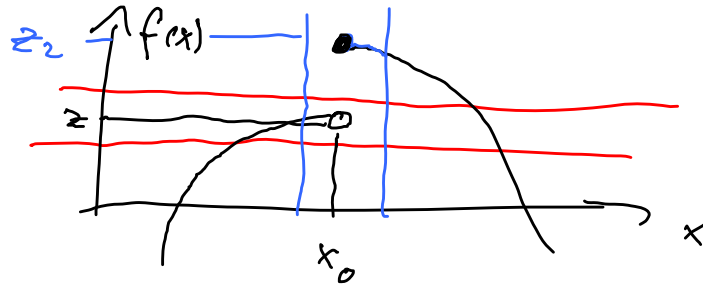
Beispiel: $\frac{\sin(x)}{x}$

x	± 1	± 0.2	± 0.1	± 0.01
$\frac{\sin(x)}{x}$	0.841	0.993	0.998	0.99998



Was also ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$? Ist es 1?

ohne Grenzwert



Weitere Beispiele

- 1) $f(x) = c$ (konstante Fkt) hat überall
(für jedes $\lim_{x \rightarrow x_0}$) den Grenzwert c
- 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ hat bei $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.

Bew.: $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$f(x_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ist eine divergente Folge

Oder $y_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(y_n) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} = -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

