V 13.11.13

Beispiel Grenzwert $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & f \; x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{x} & f \; x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ denn: $f. (x_n) \xrightarrow{n \to \infty} -\infty$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{x_n}\right)$
$= -\frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \infty$, denn für "linksseitiges" $x_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right) = \infty$$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$, denn für "rechtsseitiges" $(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0+$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{0-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$$

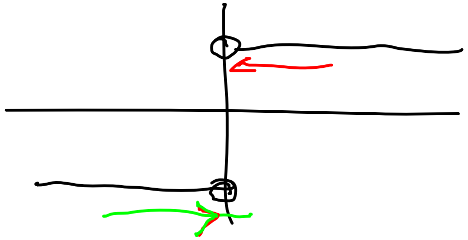
$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, denn für $(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x_n-1)}(x_n+1)}{\cancel{(x_n-1)}} = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} = 2$$

2. Bsp



$\operatorname{sign}(x)$: links- und rechtsseitiger Grenzwert

ex: $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign}(x) = -1$

$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign}(x) = +1$

3. Bsp $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ besitzt keinen Grenzwert bei $x_0 = 0$

denn: $x_n = \frac{1}{n\cdot\frac{\pi}{2}}$ ist eine Nullfolge

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n\frac{\pi}{2}}\right)}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = [1, 0, -1, 0, 1, \dots]$$

hat keinen Grenzwert (sie oszilliert)

Man sagt: $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat bei $x=0$ Oszillationspunkt

Übung a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)\cos(x-1)+\frac{\sin(x-1)}{x+1}\right]$

$$= \left[(1+1)\cos(1-1)+\frac{\sin(1-1)}{1+1}\right].$$

$$= 2\cos(0)+\frac{\sin(0)}{2} = \underline{\underline{2}}$$

1. Versuch beim Grenzwert berechnen $\lim\limits_{x\to x_0}$:
Einfach x_0 einsetzen

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}\right] = \frac{3}{0}-\frac{6}{0} = \infty-\infty$

↳ unentscheidbar

2. Versuch: Termumformung, Brüche auf HN

Lösung A:

$$\frac{x+2}{x-1} - \left(\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right) \qquad HN: (x-1)(x+1)$$

$$= \frac{(x+2)(x+1) - (x^2+2x+3)}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{\cancel{x^2} + \cancel{2x} + x + 2 - \cancel{x^2} - \cancel{2x} - 3}{(x-1)\,(x+1)}$$

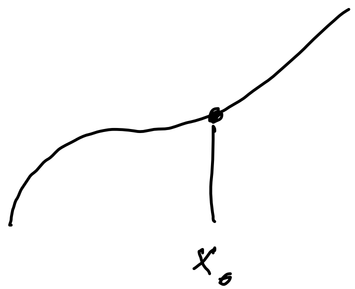
$$= \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)} = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \to 1} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

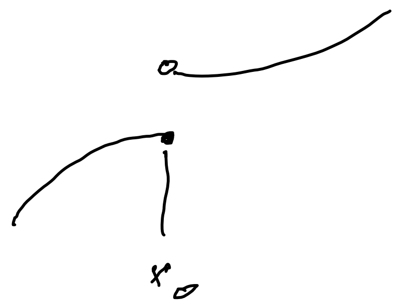
Lösung B: $\cancel{x^2 + 2x + 3 = (x+(-1))\;(x+(-3))}$

$$\cancel{\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{x+2}{x-1} - (}$$

Stetigkeit



Stetig



unstetig

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Übung

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f_1(0) = 0 \Rightarrow \text{unstetig}$$

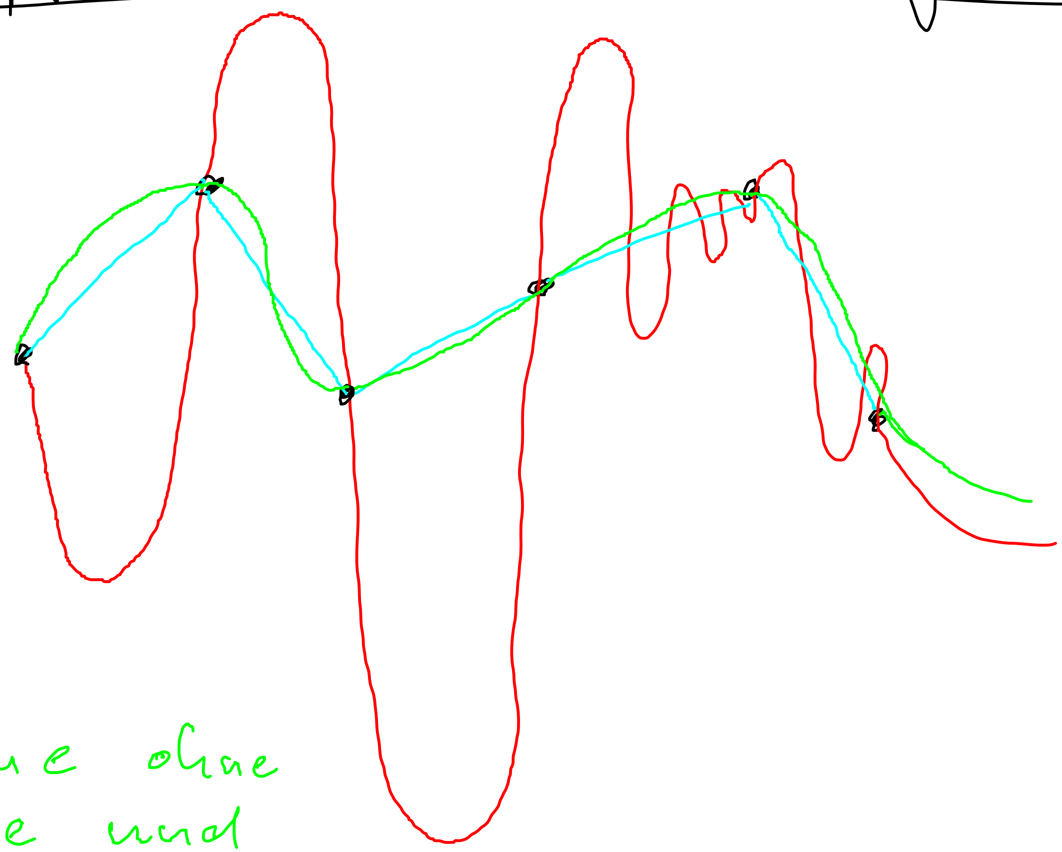
$$\lim_{x \to 0} f_2(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f_2(0) = 1 \Rightarrow \text{stetig}$$

$$\lim_{x \to 0} f_3(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 = f_3(0) = -1$$

$$\Rightarrow \text{stetig}$$

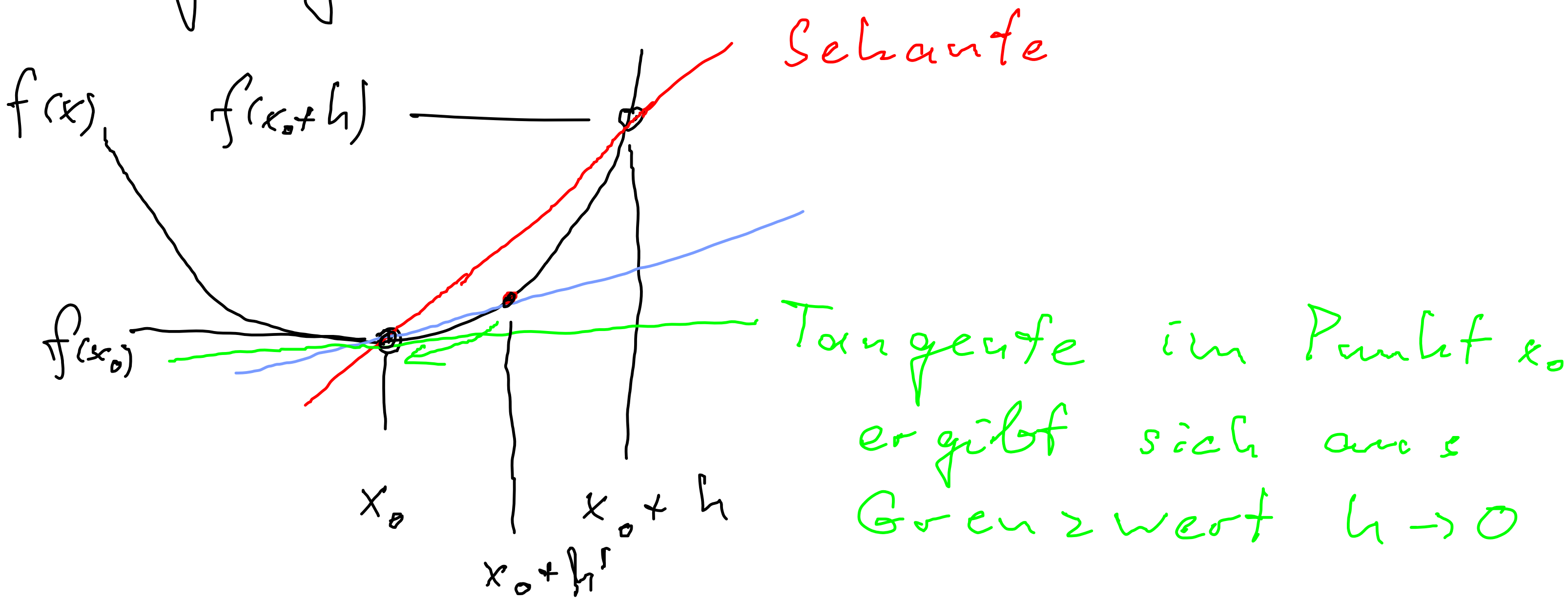
$$\lim_{x\to 0} f_4(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 = f(0) = -1 \Rightarrow \text{stetig}$$

Differentialrechnung



zeichne ohne
Knicke und
mit Steigung möglichst klein

Steigung einer Funktion



Steigung Sekante $m = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\cancel{x_0}+h - \cancel{x_0}}$

Steigung der Tangente $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

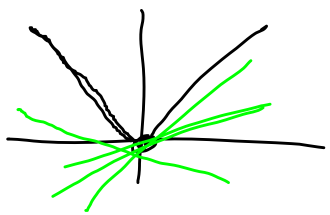
Beispiel 1: Was ist $f'(x_0)$ für $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \underline{2x_0 + h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \underline{\underline{2x_0}}$$

Beispiel 2 $f(x) = |x|$ bei $x_0 = 0$



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & f \quad x > 0 \\ -1 & f \quad x < 0 \end{cases}$$

(Steigung im Fkt-graphen)

daher ist links- und rechtsseitige Ableitung verschieden $\Rightarrow$ $f'(0)$ existiert <u>nicht</u>

n. Ableitung

$f(x) \xrightarrow{\text{ableiten}} f'(x)$ ist auch wieder eine Fkt

$\xrightarrow{\text{ableiten}} f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$

Beispiel Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{x+1}$$

$u(x) = x^2$

$v(x) = x+1$

$u'(x) = 2x$

$v'(x) = 1$

$\left((x \cdot x)' = x \cdot 1 + 1 \cdot x \right.$
$= 2x$

$$f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$