

V 20.11.13

Kettenregel: Ableitung von $g(\underbrace{f(x)}_u)$

Beispiel $h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = g(\underbrace{f(x)}_u)$ mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Damit ist

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$= 2f(x) \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$= 2 \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{2(x^4+2x^3)}{(x+1)^3}$$

$$h_1(x) =$$

$$a2) \sin(x^3)$$

ii) a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

b) $h(x) = e^{\sin(x^2)}$

$$g(x) = x^2$$

$$g(u) = u^2$$

$$g'(u) = 2u$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

(letzte Übung)

Lsg a) Quotientenregel

$$\text{mit } u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$$

$$v = (x+1)^2 \Rightarrow v' = 2(x+1) \cdot 1$$

↑
Kettenregel

$$\text{oder } v = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow v' = 2x + 2$$

N.B

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' \\ = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(x+1)^2 \cdot 3x^2 - 2(x+1) \cdot x^3}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1) 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

a2) Kettenregel $h_1(x) = \sin(x^3)$

$$h_1'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \underline{\underline{\cos(x^3) \cdot 3x^2}}$$

$$g(u) = \sin(u)$$

$$g'(u) = \cos(u)$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

b) 2fach Kettenregel

Funktion / Ableitung

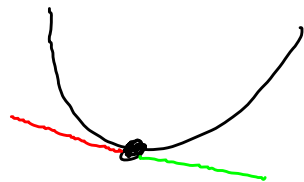
ganz außen:	e^u		e^u
mitte	$\sin(u)$		$\cos(u)$
innen	x^2		$2x$

$$h'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

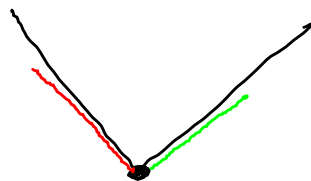
$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$$

Wann ist $f'(x)$ definiert?

Wenn die Steigung "links und rechts" gleich ist



$f'(x)$ definiert



$f'(x)$ nicht def.

Witz!

$$\frac{\cancel{\sin} x}{\cancel{x}} = \cancel{\sin} x = 6$$

$$f(x) = |(x+1)^3|$$

linksseitig: $f'(x) = -3(x+1)^2 \Rightarrow f'(-1) = 0$

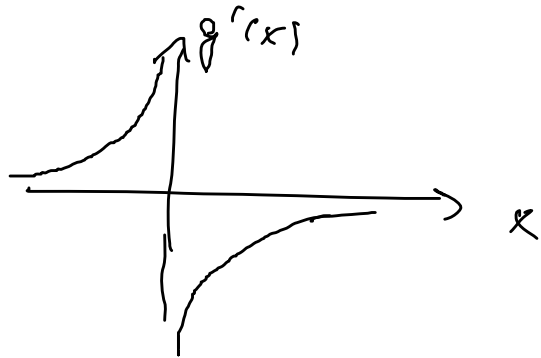
rechtsseitig: $f'(x) = +3(x+1)^2 \Rightarrow f'(-1) = 0$

$\Rightarrow f'(-1)$ ist definiert

(ii) Ableitung von $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

Fall 1: $x < 0$: $g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$

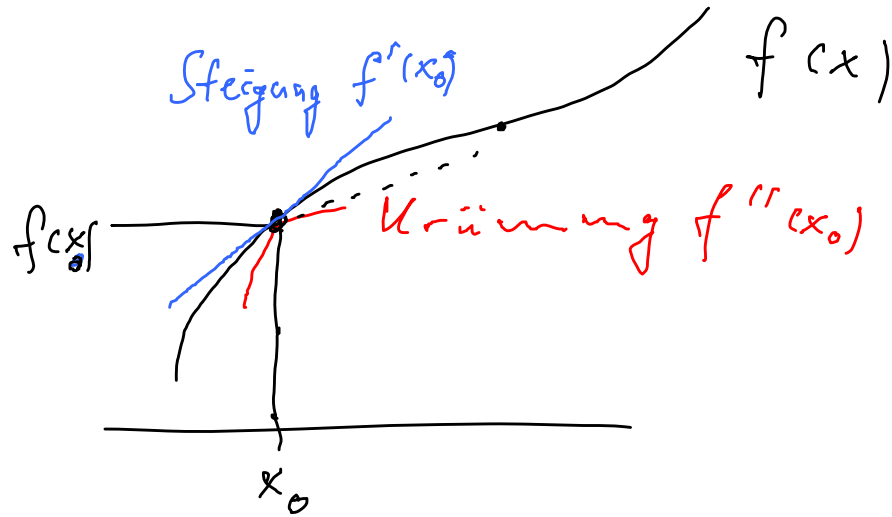
Fall 2: $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2}$



$\Rightarrow g'(0)$ ist nicht
definiert

(Polstelle der Ableitung)

Satz 2 von Taylor



(komplizierte
Funktion)

$f(x)$ annähern
a) durch Funktionswert
 $f(x_0)$

b) durch Gerade Linear-
versatz

c) durch Polynom 2.
Grades usw.

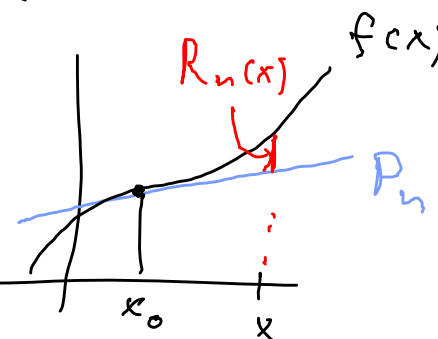
Allgemein $f(x)$ annähern durch ein
Polynom n -ten Grades

$$P_n(x-x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Welchen Fehler macht man

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x - x_0)|$$

→ Restgliedformel Skript



Beispiel $f(x) = \ln(x)$. Taylorpolynom
der Ordnung $n=3$ an der Stelle $x_0=1$
Was ist der Fehler für $x=1.5$ höchstens?

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$2x^{-3}$	2
4	$-6x^{-4}$	///

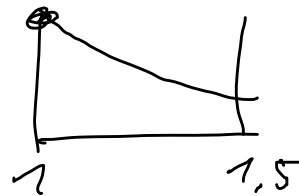
$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} f''(1)(x-1)^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{3!} f'''(1)(x-1)^3 \\
 &= 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (x-1)^3
 \end{aligned}$$

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3$$

$$P_3(1.5) = \frac{10}{24} = 0.41\bar{6}$$

Welcher Fehler? Was macht $|f_4(x)|$ in $[1, 1.5]$?

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{6}{x^4} \quad \text{ist monoton fallend}$$



daher ist $C = |f^{(4)}(1)| = 6$ eine obere Schranke

$$R_n(x) = \frac{C}{4!} (x-1)^4 \Rightarrow R_4(1.5) = \frac{6}{24} \cdot 0.5^4 = \underline{\underline{0.0156}}$$

$$\text{Probe: } \left| \ln(1.5) - \frac{10}{24} \right| = 0.01120 \quad \checkmark$$

ii) Taylorpoly zu $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Welcher Fehler für $x = 0.3$?

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	-0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	///

$$P_5(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$P_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Restglied für $n=5$
 $|f^6(x)| = |\sin(x)| \leq 1 = C$

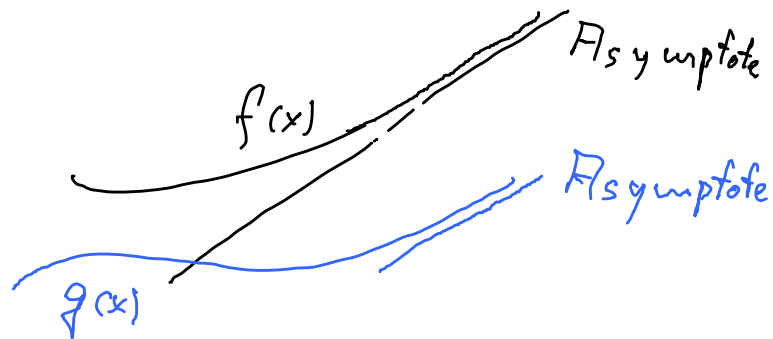
$$R_n(x) = \frac{1}{6!} (x-0)^6$$

$$R_n(0.3) = \frac{0.3^6}{6!} \approx 1 \cdot 10^{-6}$$

Maple: `taylor(sin(x), x, 5)`

L'Hospital

Grenzwert für $x \rightarrow \infty$



Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Situation} \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

Beispiel 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Sit}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Sit.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$