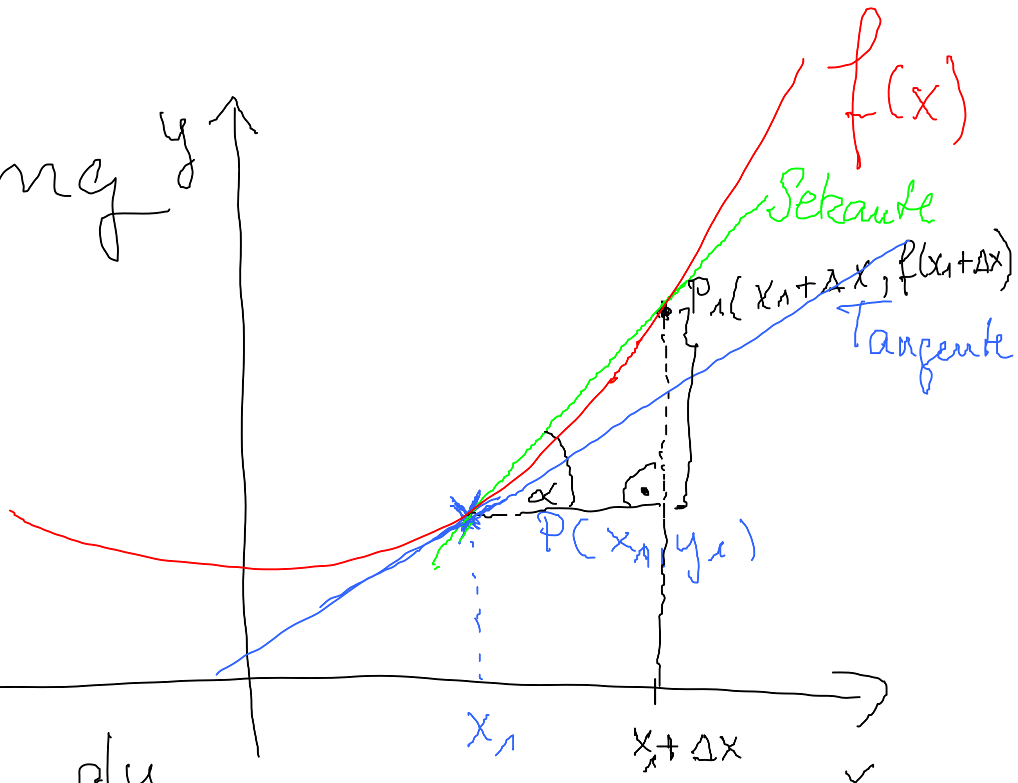
Mathematik 4.12.13

Wdh. Steigung



Steigung der Sekante

$$m = \tan\alpha = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{x_1+\Delta x - x_1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ Differentialquotient

Bp: $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

Summenregel $f'(x) = 20x^3 + 6x - \frac{1}{2}$

Bp:

Produktregel

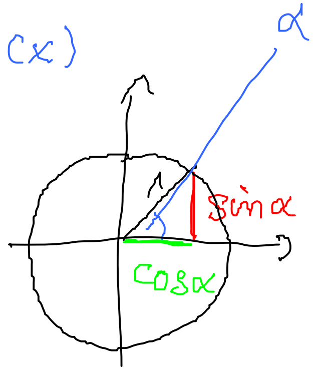
$$y = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}$$

$$y' = \underbrace{e^x \cdot \sin x}_{f'(x) \cdot g(x)} + \underbrace{e^x \cdot \cos x}_{f(x) \cdot g'(x)}$$

Bp.:

Quotientenregel

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{\text{trig. Pythagoras}}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

Bp.:

Kettenregel

$$y = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$$

$$g(x) = z = 3x^2 + 5x + 7 \qquad g'(x) = 6x + 5$$

$$f(z) = f(g(x)) = \sqrt{z} \qquad f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \underbrace{\underbrace{f'(g(x))} \cdot (6x+5)} \qquad f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot z^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

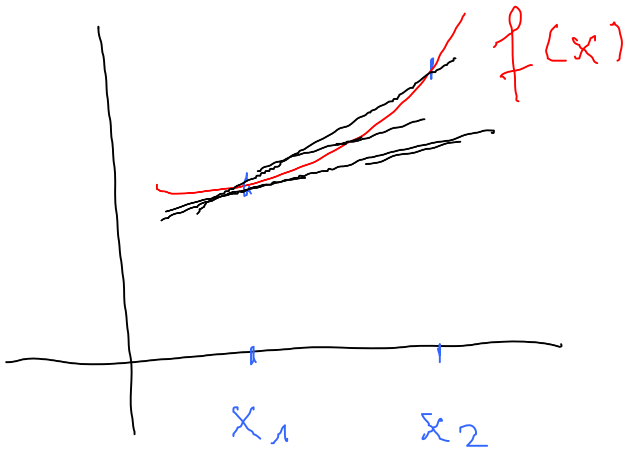
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+5x+7}} \cdot 6x+5$$

$$= \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Bedeutung der ersten Ableitung:

Steigung

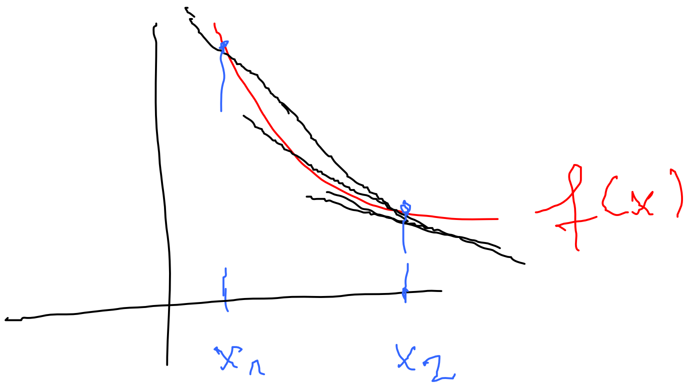


$f(x_2) > f(x_1)$ falls $x_2 > x_1$

Fkt. monoton wachsend

$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$

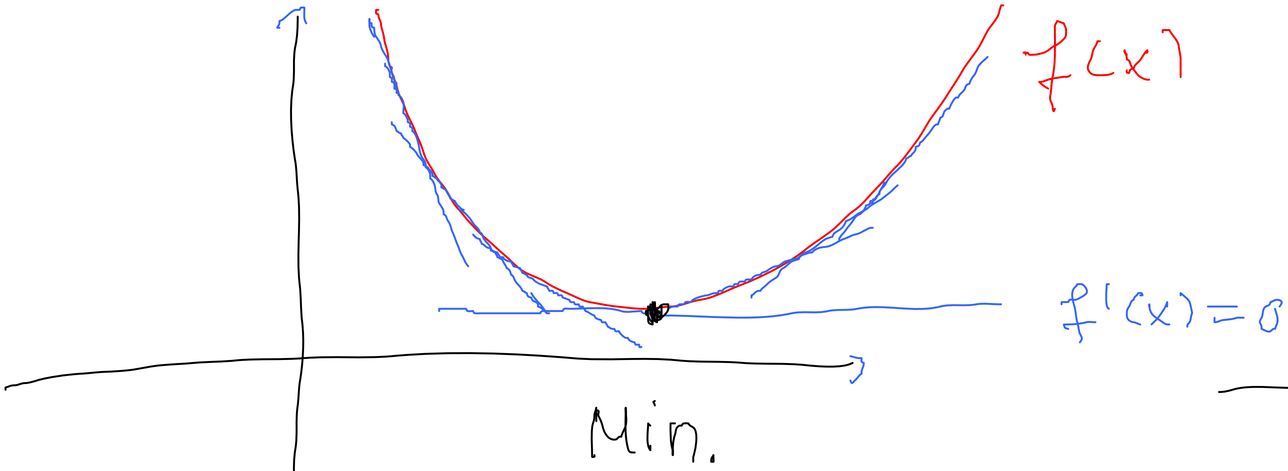
Wie verhalten sich die Funktionswerte bei Änderung der Argumente?

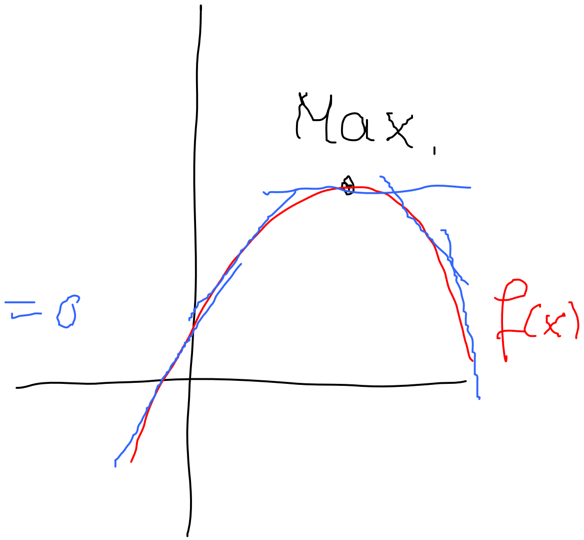


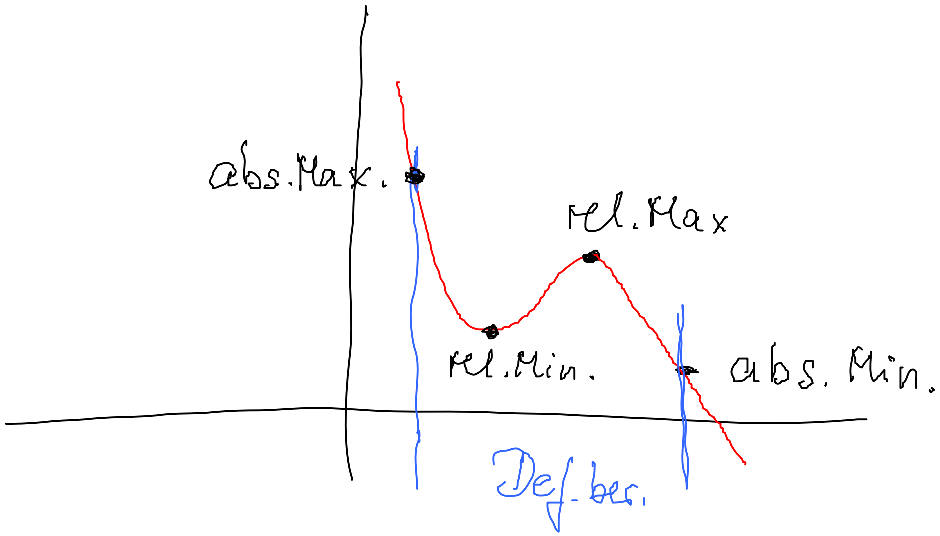
$f(x_2) < f(x_1)$ falls $x_2 > x_1$

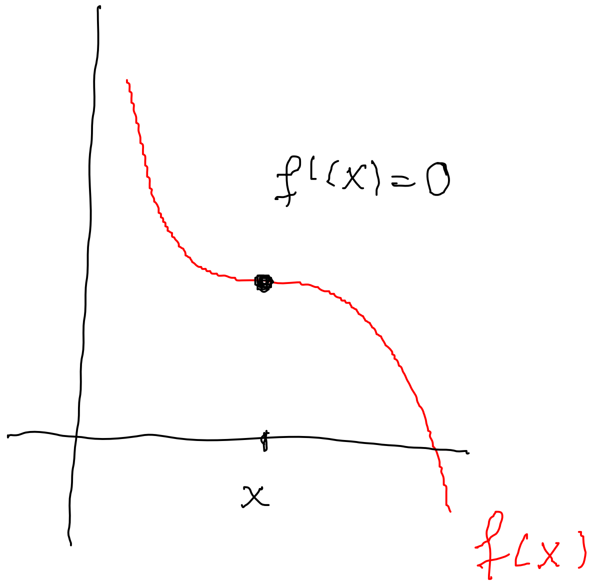
Fkt. monoton fallend

$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$


f(x)
f'(x)=0
Min.


Max.
f(x)


abs. Max.
rel. Max
rel. Min.
abs. Min.
Def. ber.


f'(x)=0
x
f(x)

Bedeutung der 2. Ableitung:

Wie ändern sich die Funktionswerte der ersten Ableitung, d.h. wie ändert sich die Steigung?

Berechnung relativer Extremwerte:

notwendige Bed. $f'(x) = 0$

liefert "Kandidaten"

hinreichende Bed. $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Max.

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Min.

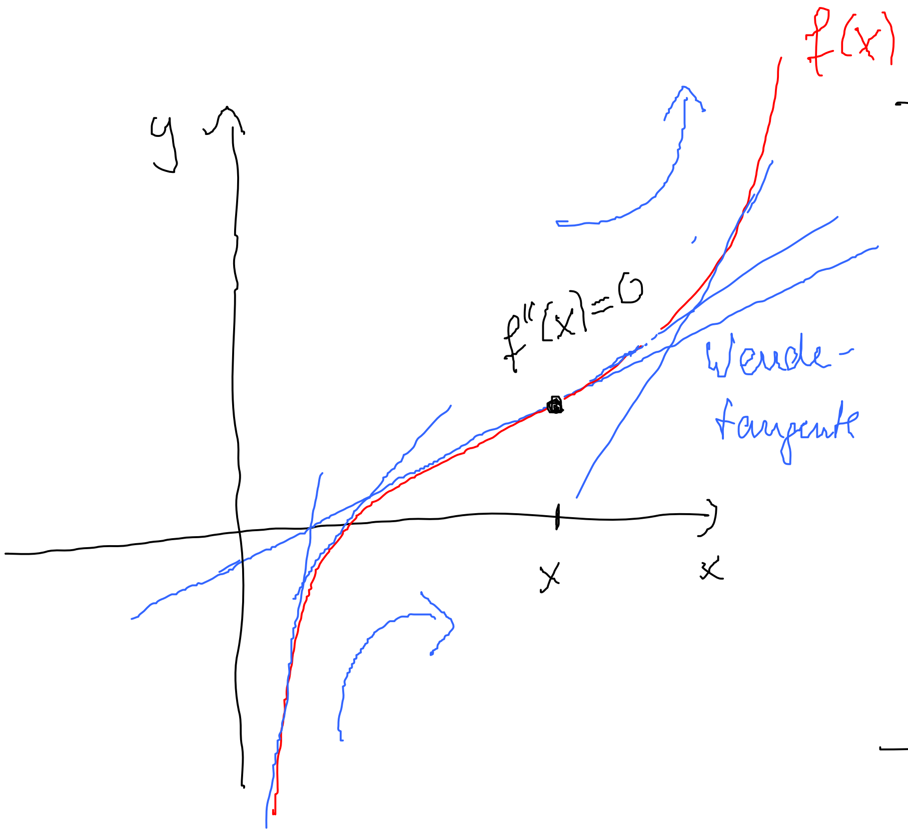
$f''(x) = 0$ evtl. Wendepunkt

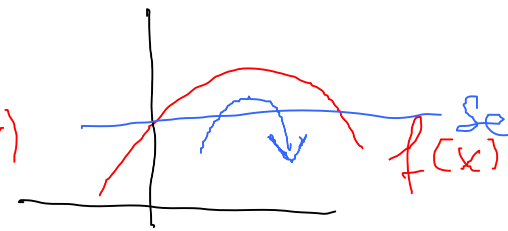
$f'''(x) \neq 0$

Krümmungsverhalten:

f def. auf $[a,b]$

f heißt konkav $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$

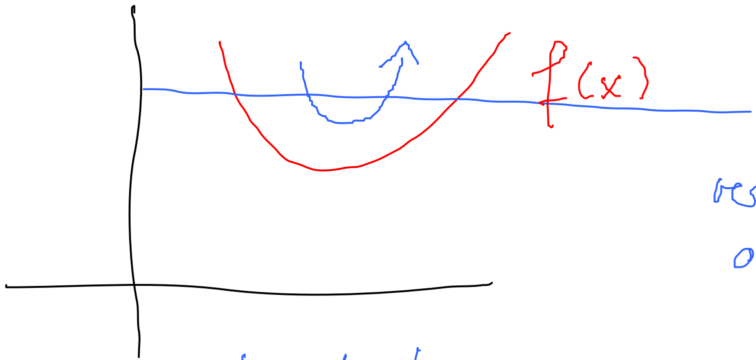




Sekante verläuft unterhalb des Graphen

Rechtskurve

f heißt konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$



Sekante verläuft oberhalb des Graphen

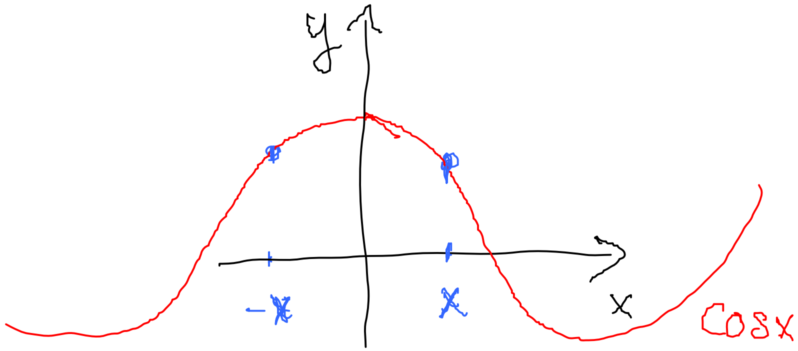
Linkskurve

Funktionseigenschaften

Symmetrie :

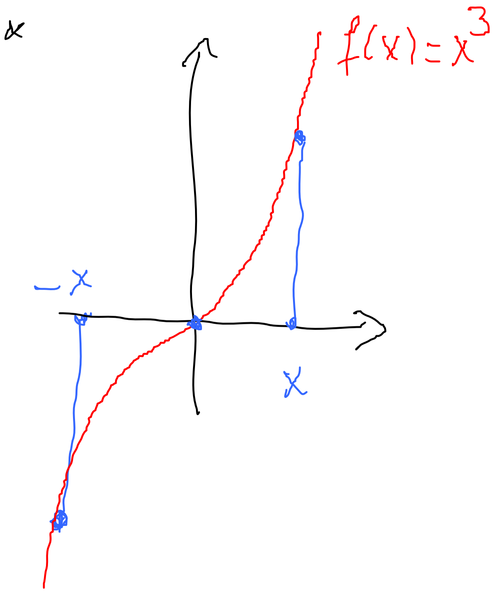
Achsensymmetrie — gerade Fkt.

$f(x)$ gerade $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$ für alle x



Punktsymmetrie — ungerade Fkt

$f(x)$ gerade $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$



Nullstellen : $f(x) = 0$

Bp: $y = 3x^2 - 5x + 2$

$y = 0 \Rightarrow$ Lösen quadr. Gl.

Bp: ganzrationale Fkt. 3. Grades $f(x) = 0$

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

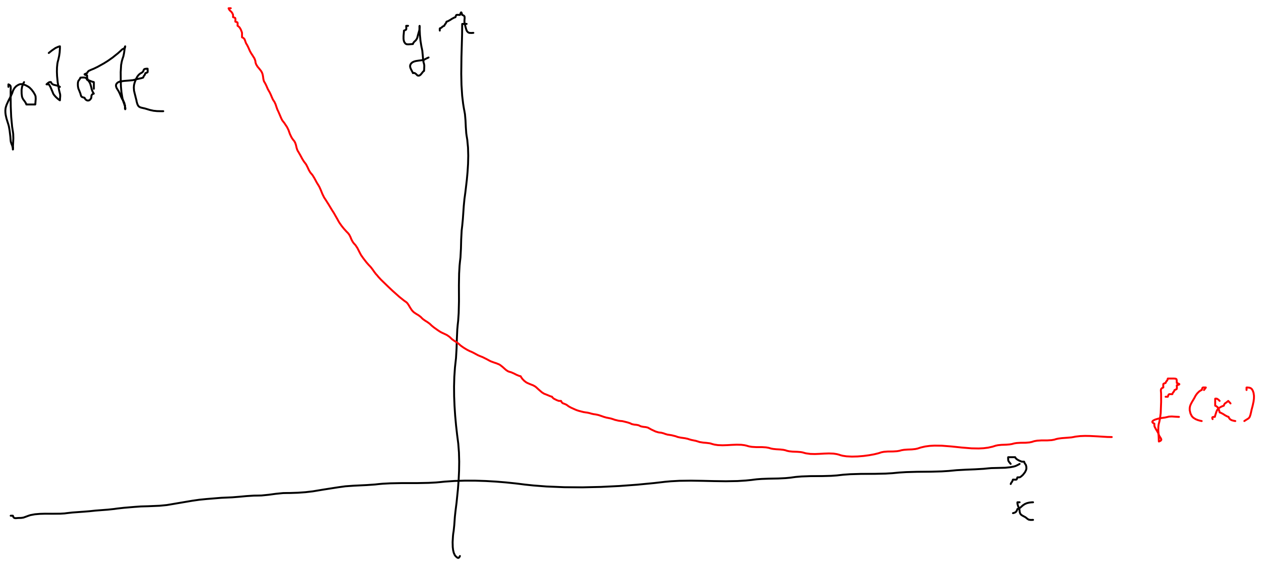
1. NST erraten

Linearfaktor durch Polynomdiv. abspalten

damit Grad erniedrigt auf 2

$\Rightarrow$ quadr. Gl.

Asymptote



Näherungsgeraden oder Kurven für $x \to \infty$

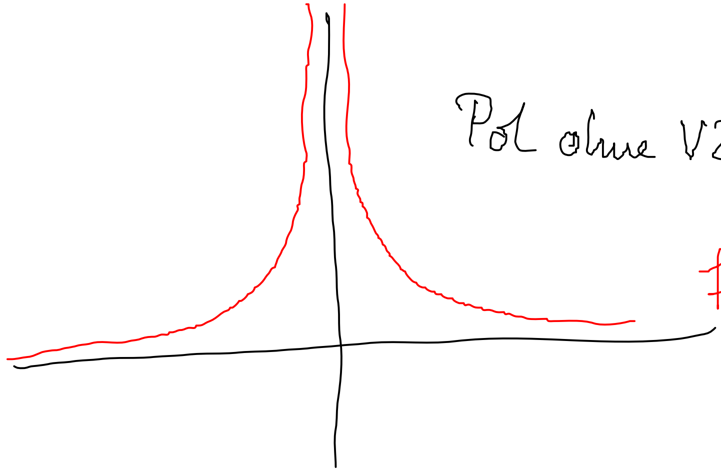
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Pole : vertikale Asymptoten

Sei x_0 Def. lücke : $\lim_{x \to x_{0+}} f(x)$

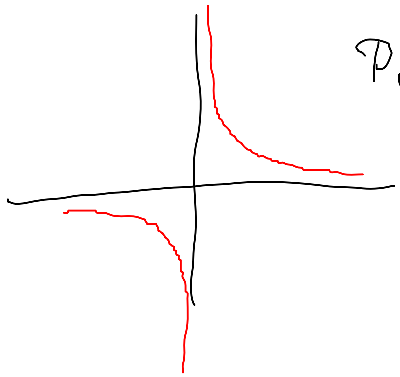
bzw. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Pol ohne VZW



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Pol mit VZW



$f(x) = \frac{1}{x}$

Bp. für eine Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-4}{x^2}$$

1) Def. ber.: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

2) Symmetrien: keine, da $f(x) \neq f(-x)$

$f(x) \neq -f(-x)$

3) Nullstellen: $f(x) = 0$ hier: $3x^2+4x-4=0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = -2$$

$$N_1\left(\frac{2}{3}, 0\right) \quad N_2(-2|0)$$

4) Asymptoe:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = \underset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{6x+4}{2x} \underset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{6}{2} = 3$$

$y = 3$ ist Asympote

5) Pole für $x = 0$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = -\infty$$

Pol ohne VZW

6) Berechnung von $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

$$f'(x) = \frac{(6x+4)x^2 - 2x(3x^2+4x-4)}{x^4}$$ Quot.regel

$$= \frac{-4x^2+8x}{x^4} = \frac{-4x+8}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot x^3 - 3x^2(-4x+8)}{x^6} = \frac{8x-24}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{8x^4 - 4x^3(8x-24)}{x^8} = \frac{-24x+96}{x^5}$$

7) Extremwerte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x+8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$f''(2) = \frac{8 \cdot 2 - 24}{2^4} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

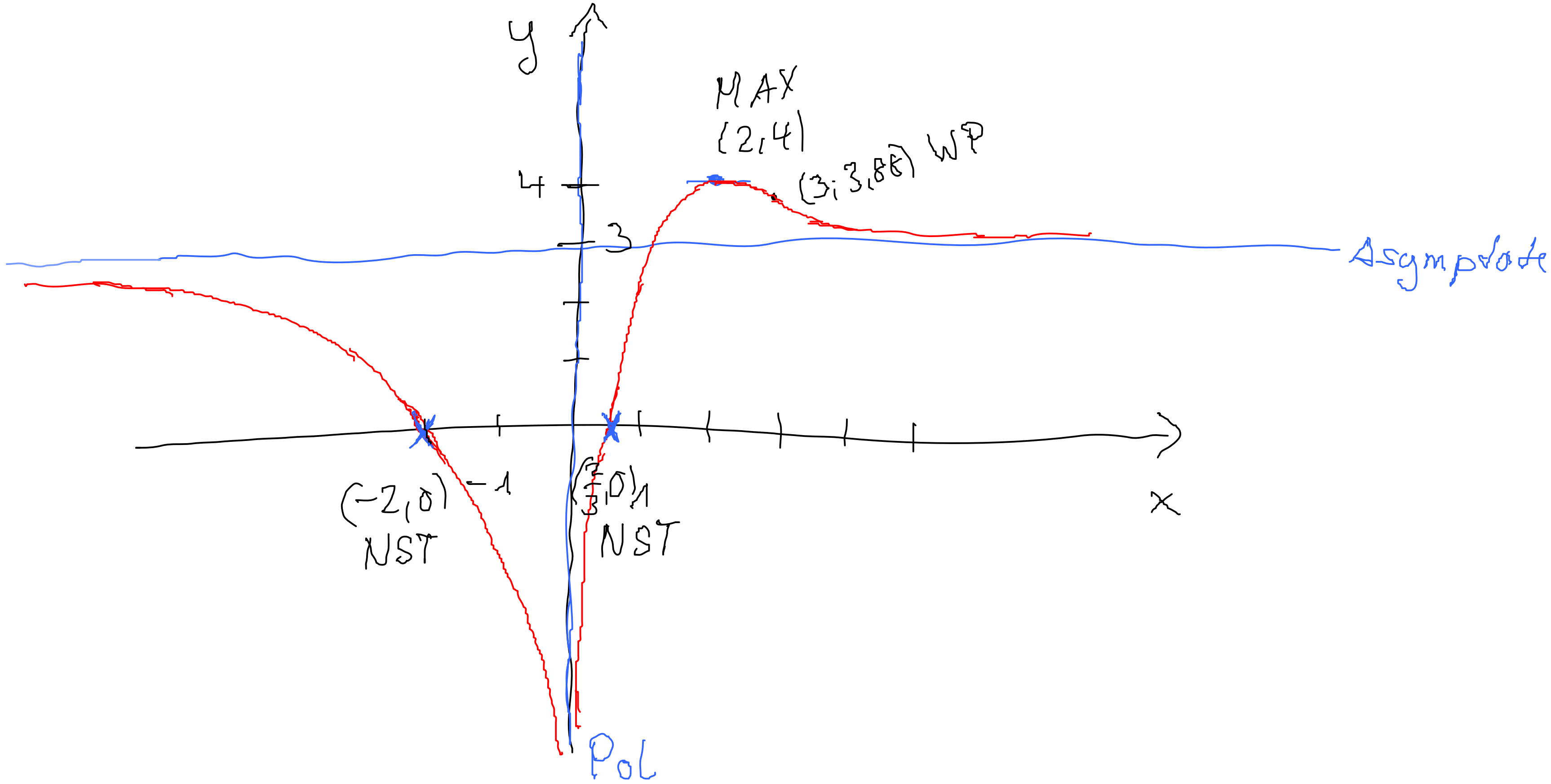
damit Max bei $(2, f(2))$, d.h. $(2, 4)$

8) Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3$

$$f'''(3) = \frac{-24 \cdot 3 + 96}{3^5} \neq 0$$

WP bei $(3, f(3))$ d.h. $(3; 3{,}88)$

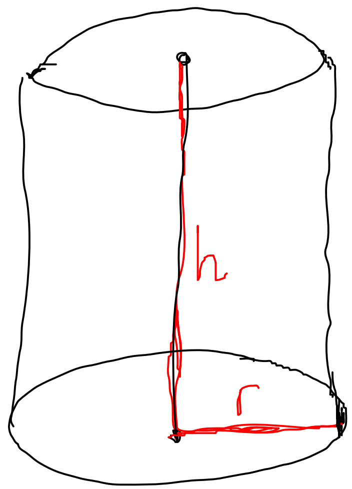


Extremwertaufgabe

Bsp (Klassiker)

Herstellung von Blechdosen mit Volumen 1 l

Frage: Wie müssen die Abmessungen der Dose gewählt werden, damit der Blechverbrauch minimal wird?



$V = 1\,l = 1000\,cm^3$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000\,cm^3$

Nebenbedingung

Zielfunktion: Oberfläche des Zylinders

$$Ob(r,h) = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Boden}} + \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Deckel}} + \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{Mantel}}$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Aus Nebenbed.: $h = \dfrac{1000}{\pi \cdot r^2}$ $(*)$ $(r \neq 0)$

$*$ in $Ob(r,h)$:

$$Ob(r) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

$$= 2\pi \cdot r^2 + \frac{2000}{r} = 2\pi r^2 + 2000 \cdot r^{-1}$$

$$Ob'(r) = 4\pi r - 2000 \cdot r^{-2}$$

$$Ob''(r) = 4\pi + 4000 \cdot r^{-3}$$

$$Ob'(r) = 0 \iff 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$\iff 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2$$

$$\iff 4\pi r^3 = 2000$$

$$\iff r^3 = \frac{2000}{4\pi} = \frac{500}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}4192 \text{ cm}$$

$$O_b''(r) > 0 \Rightarrow \text{MIN}$$

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot 5{,}4192^2} \text{ cm} = 10{,}838 \text{ cm}$$