Mathe 11.12.13

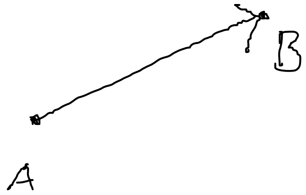
Vektorrechnung

Skalare : Maßzahlen mit Einheit

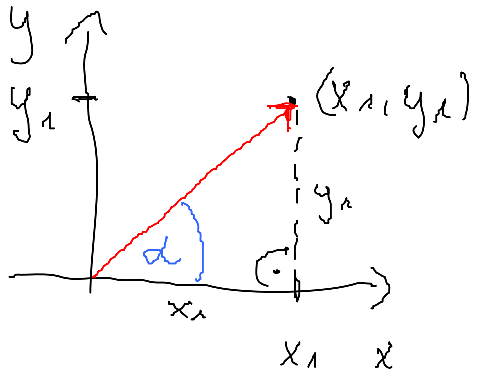
Vektor : Strecke $\vec{s}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$
Kraft $\vec{F}$

Def. Vektor : Größe, durch Maßzahl und Richtung eindeutig beschreiben

Darstellung: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ bzw. $\vec{\mathbf{u}}$, ...

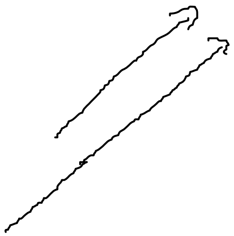


$\overrightarrow{AB}$

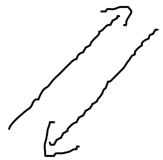


$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}$

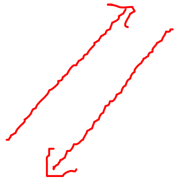
$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$



parallele Vektoren



antiparallele Vektoren



$\vec{a} = -\vec{a}$

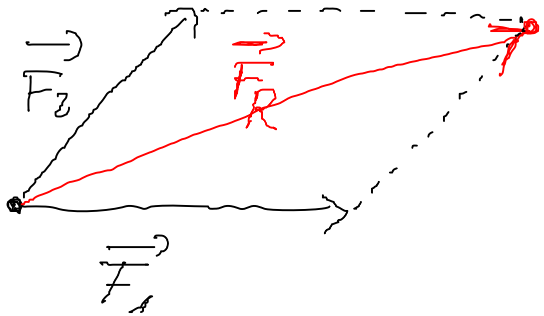
↑

inverse Vektor zu $\vec{a}$

Rechenoperationen

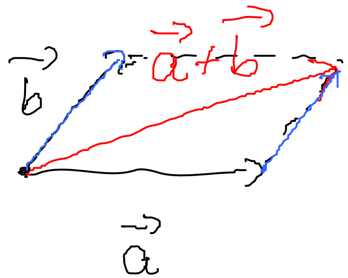
Addition

Bp. Physik



Kräfteparallelogramm

Def:

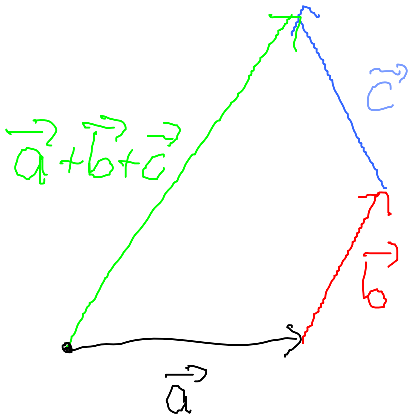


Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$

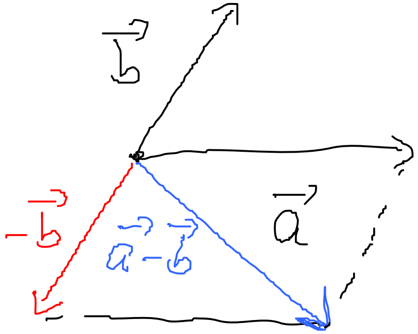
$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ kommutativ

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ assoziativ

Vektorpolygon:

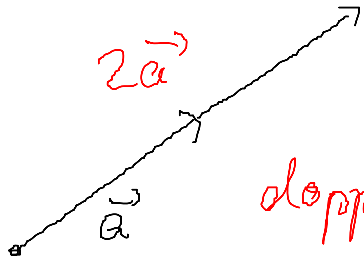


$\vec{a}-\vec{b}$



Multiplikation mit einem Skalar

$$\vec b = 2\vec a$$



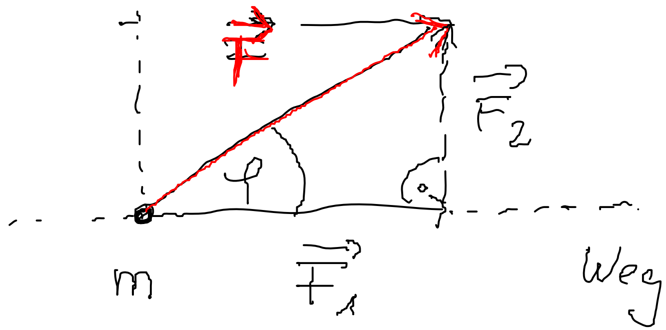
doppelte Länge

Allg.: $\vec b = \lambda \vec a \qquad |\vec b| = |\lambda \vec a| = |\lambda| \cdot |\vec a|$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Weitere "Multiplikation": Skalarprodukt

Herleitung (aus Physik):



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$W = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{s}|$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \Leftrightarrow \underbrace{|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi}$$

$$\boxed{W = |\vec{F}|\,|\vec{s}| \cdot \cos\varphi}$$

Def: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\quad \varphi = \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}$

Achtung
$2\pi = 360^0$
$\pi = 180^0$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

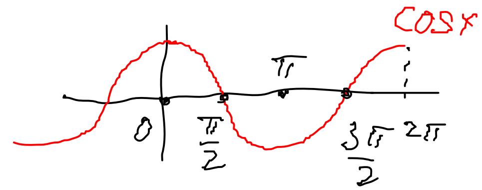
Achtung: Das Ergebnis ist kein Vektor, sondern ein Skalar

Da $|\vec{a}|, |\vec{b}| \geq 0$, damit für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$

$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0$

Falls $\vec{a} = \vec{0}$ (Nullvektor), dann $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
oder $\vec{b} = \vec{0}$

Eigenschaften:



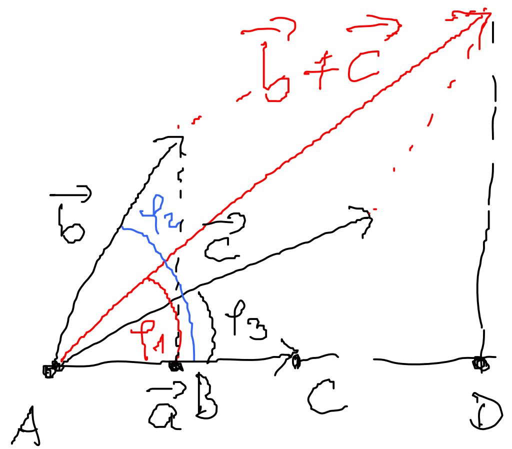
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{falls } \vec{a} \neq \vec{0}, \text{ da } \cos 0^\circ = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$ Distributivgesetz

Beweis



$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi_2$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi_3$$

... etc.

durch Zurückführen auf Betragsschreibweise
und damit auf das Rechnen in $\mathbb{R}$

Frage: Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein,
wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\iff \cos(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

d. h. $\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Achtung: Das Assoziativgesetz gilt nicht!

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

3p:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = 25$ gesucht $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

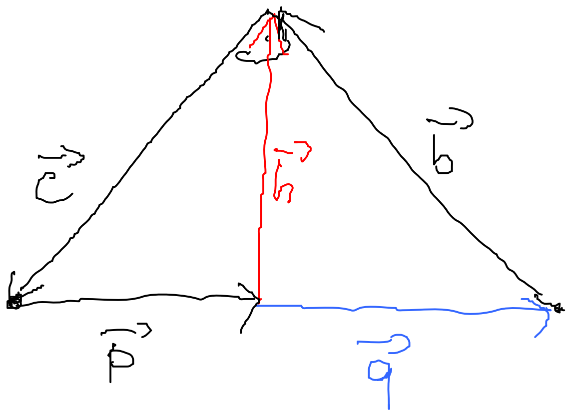
$|\vec{a}| = 4 \quad |\vec{b}| = 5$

$$15 = 4 \cdot 5 \cdot \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = 41{,}4^\circ$$

3p Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck



$$h^2 = p \cdot q$$

Beweis: $\vec{p} + \vec{h} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = -\vec{p} - \vec{h}$

$$\vec{q} + \vec{b} - \vec{h} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \vec{h} - \vec{q}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow (\vec{h} - \vec{q})(-\vec{p} - \vec{h}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\vec{h} \cdot \vec{p}}_{=0} - \vec{h} \cdot \vec{h} + \vec{q} \cdot \vec{p} + \underbrace{\vec{q} \cdot \vec{h}}_{=0} = 0$$

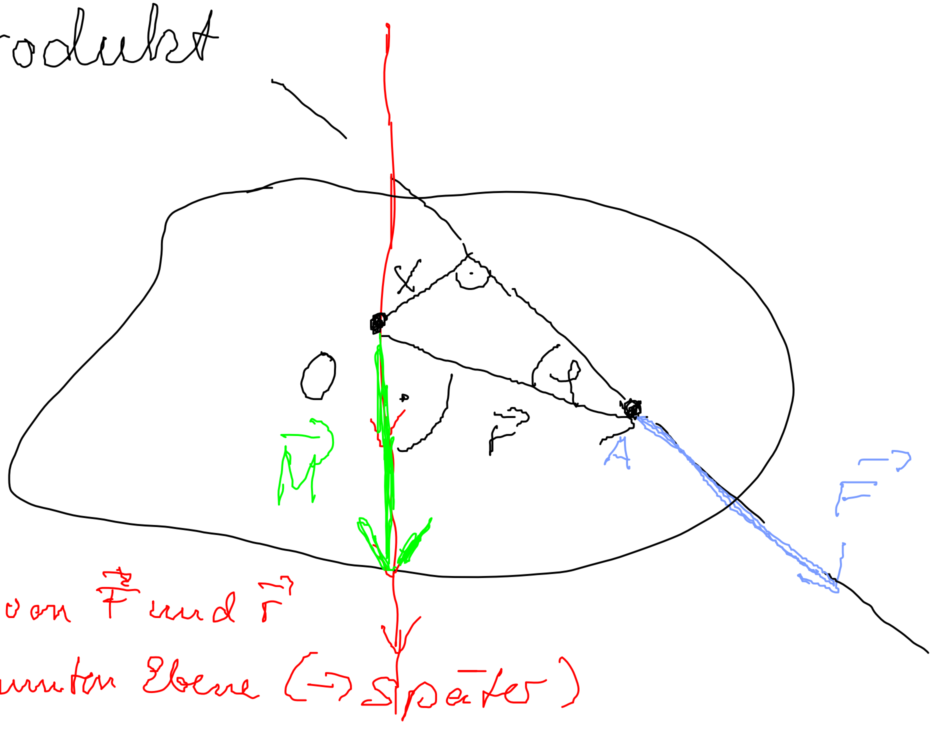
$$\Leftrightarrow \quad -\vec{h}\cdot\vec{h} = -\vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{h}^{\,2} = \vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{h}|\cdot|\vec{h}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = p\cdot q \qquad \text{q.e.d.}$$

Vektorprodukt



Richtung der Achse senkrecht zu der von $\vec{F}$ und $\vec{r}$ aufgespannten Ebene ($\rightarrow$ später)

$\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ A ein Punkt auf der Wirkungslinie von $\vec{F}$

x : Abstand Drehachse zur Kraftrichtung = Hebelarm

$x = |\vec{r}| \cdot \sin\varphi$

$M = |\vec{F}| \cdot x$ Drehmoment

$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi$

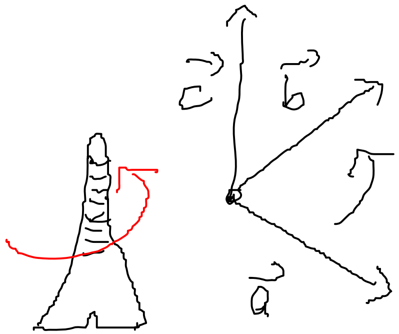
Def.: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\varphi = \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}$

Vektorprodukt ist ein Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2) $\vec{c} \perp$ auf $\vec{a}$ und $\perp$ auf $\vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein "Rechtssystem"

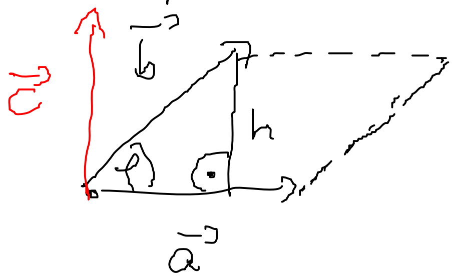


$\vec{a} \times \vec{b}$

Vektorprodukt

Kreuzprodukt

Geometrische Interpretation



$$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

Flächeninhalt Parallelogramm: $|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = |\vec{c}|$

Eigenschaften: nicht kommutativ

aber: $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$

nicht assoziativ

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

distributiv

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = 0$

oder $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

ÜA: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a} \not\perp \vec{b}$

Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

Bp: $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} \iff 3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig

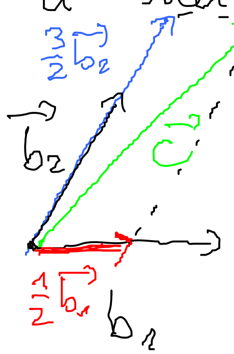
Def: Linearkombination

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ Vektoren

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \ldots\ldots + \lambda_n \vec{b_n}$$

$$(\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n)$$

$\vec{a}$ heißt Linearkombination



$\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ ex. $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$

mit $\lambda_1 \vec{b_1} + \ldots \lambda_n \vec{b_n} = \vec{0}$

$\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 \vec{b_1} + \ldots \lambda_n \vec{b_n} = \vec{0}$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

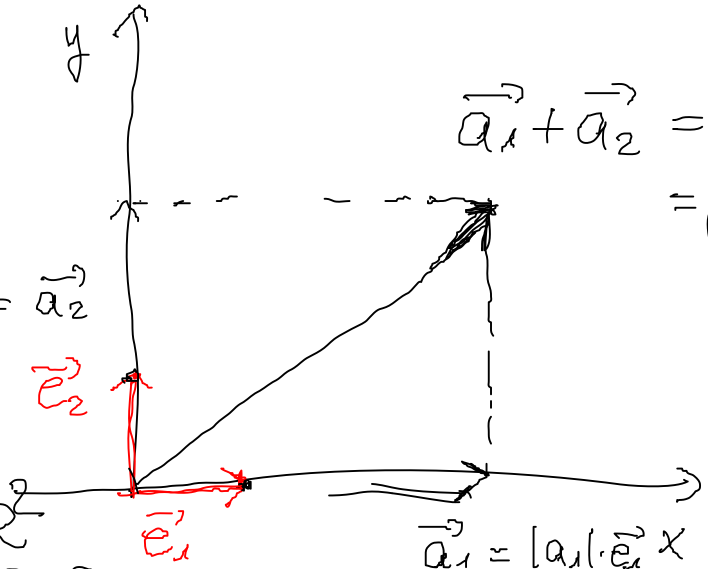
Def:

$|\vec{e}_1| = 1$

$|\vec{e}_2| = 1$

$|a_2| \cdot \vec{e}_2 = \vec{a}_2$

Einheitsvektoren bilden Basis im $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a} = |a_1| \cdot \vec{e}_1 + |a_2| \cdot \vec{e}_2$$

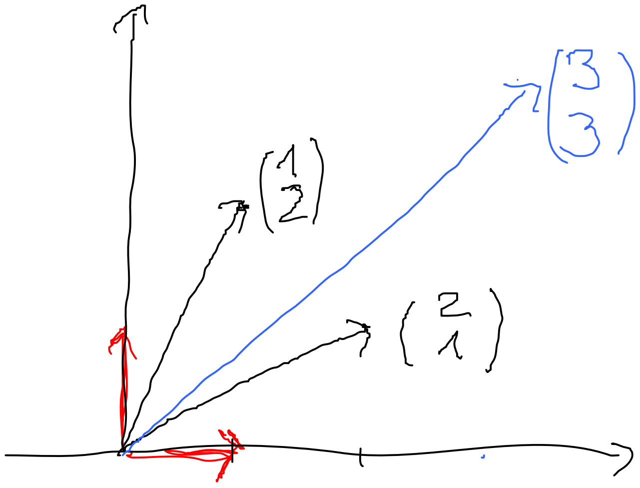
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$|a_1| = a_1$

$|a_2| = a_2$

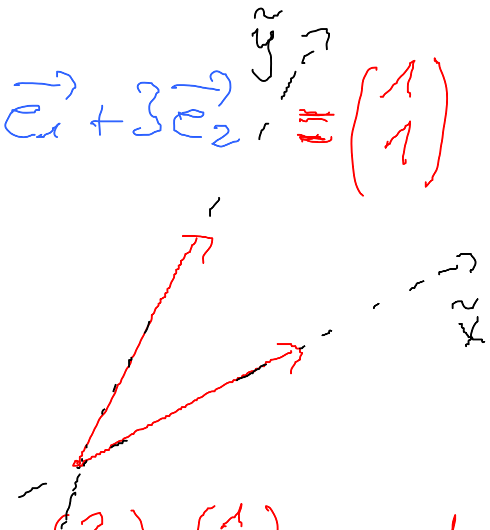
$$(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \underline{1} \cdot \vec{e}_1 + \underline{0} \cdot \vec{e}_2$$

$$(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \underline{0} \cdot \vec{e}_1 + \underline{1} \cdot \vec{e}_2$$



$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ Basis



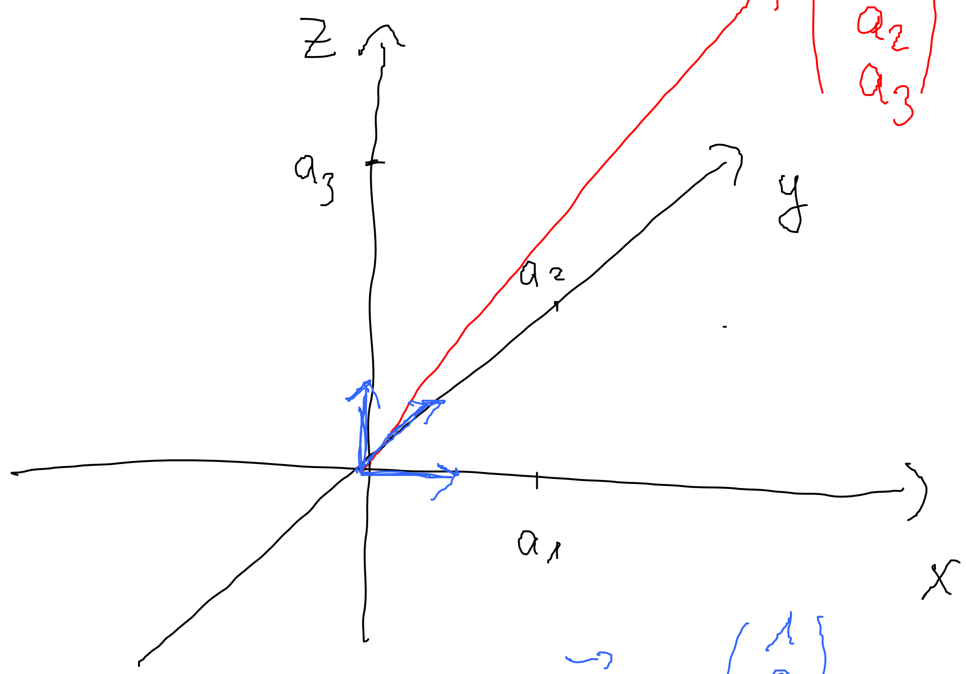
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ auch Basis

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

Dimension 2 bisher $\rightarrow$ Dimension 3



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

Ausdehnung auf den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ Paar

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Tripel

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ Quadrupel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

n-Tupel Spaltenvektor

$\vec{a} = (a_1 \ldots\ldots a_n)$

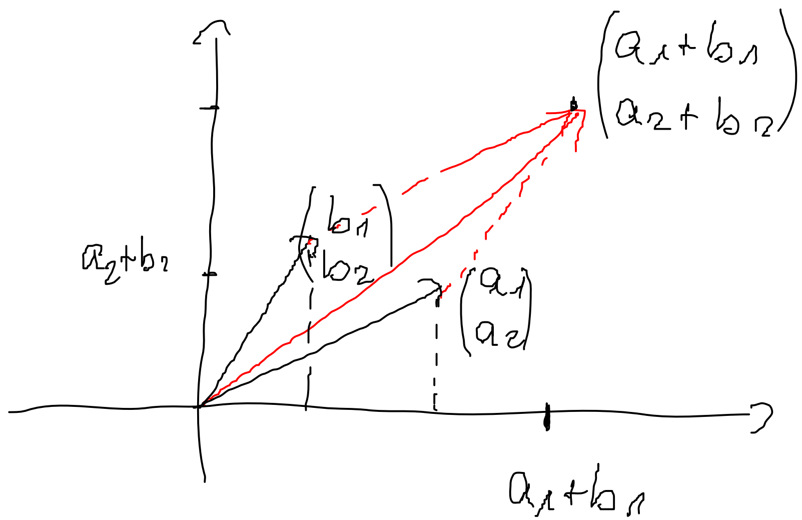
Zeilenvektor

Rechnen mit n-dimensionalen Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \quad a_2 = b_2 \quad \ldots \quad a_n = b_n$$

Addieren von Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Weiterführend: Begriffe: Vektorraum $\mathbb{R}^n$

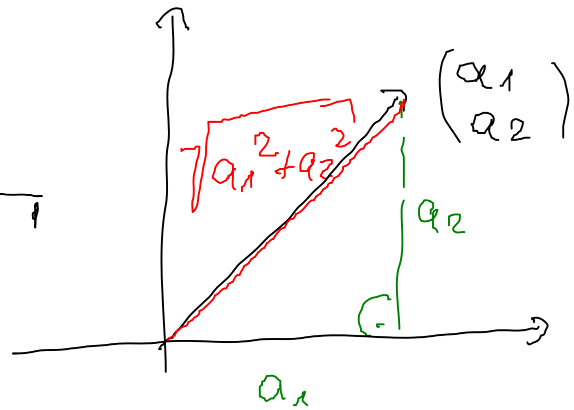
Dimension n

Basis n Vektoren lin. unabhängig

Def: Länge eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$



$$\text{Bp} = |e_i| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Komp.} \right| = 1$$

Skalarprodukt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$\vec{a}, \vec{b}$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 + 63 + 32$

$= 100$