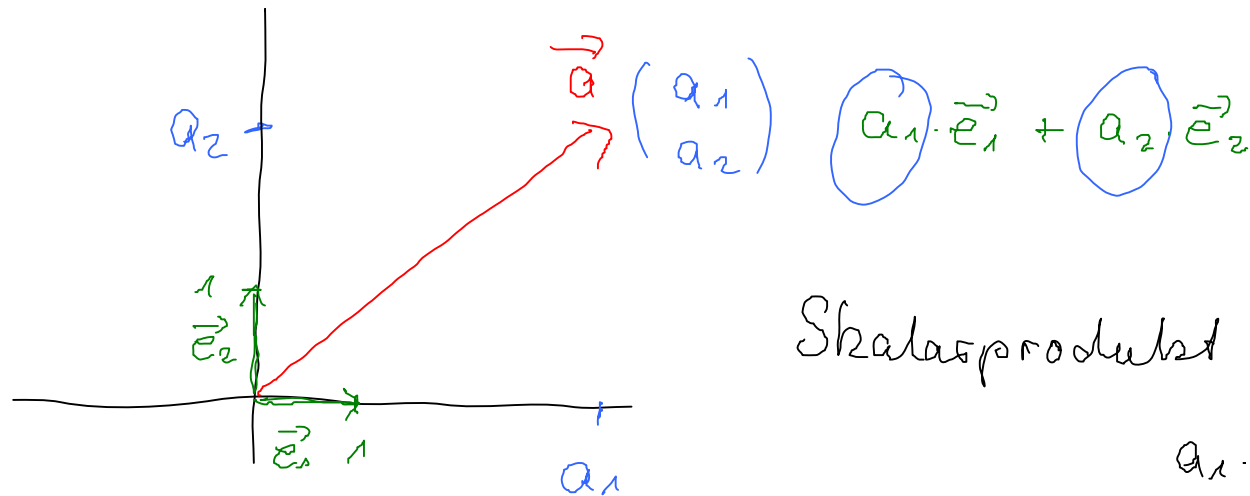


Mathematik

18.12.2013

nächste Vorlesung : 8.1.2014



Skalarprodukt : $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

höhere Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (a_1 \dots a_n)$$

Zeilenvektor

Spaltenvektor

Vektorprodukt in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Determinante} \\ \rightarrow \text{Später} \end{array}$$

Normierter Vektor :

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{|\vec{a}|} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Norm } 1 \\ (= \text{Länge}) \end{array}$$

Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

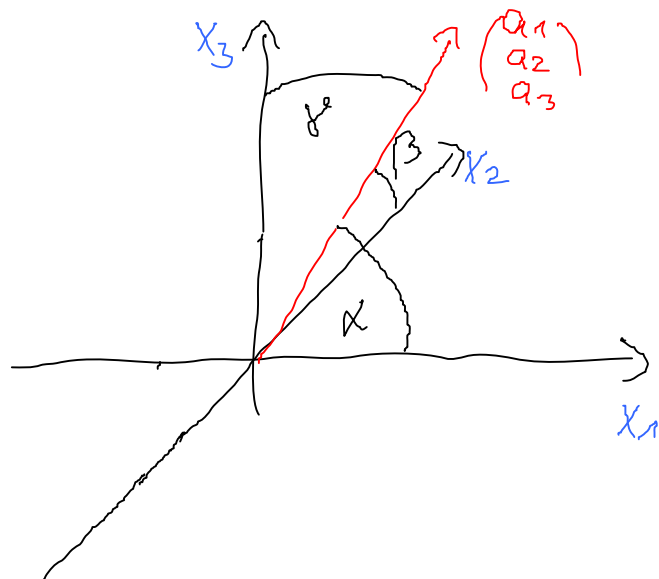
$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

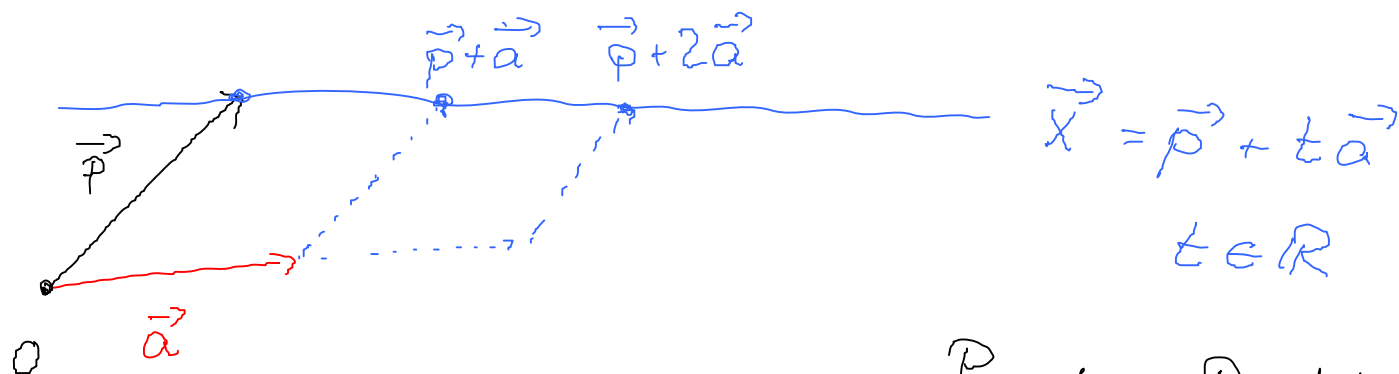
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^3 \text{ gilt: } \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \cos \alpha \quad \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \cos \beta \quad \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \cos \gamma$$



Lage von Punkten, Geraden und Ebenen

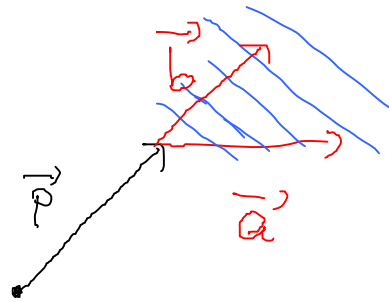


Punkt-Richtungs-
form einer Geraden

Parameterform

$\vec{p}$: Ortsvektor

$\vec{a}$: Richtungsvektor

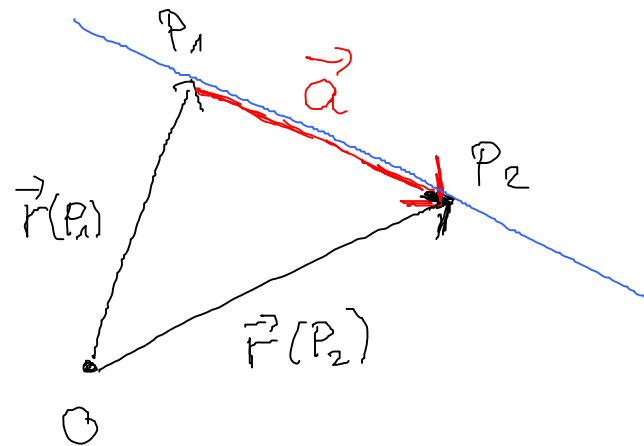


$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Punkt - Richtungsform einer Ebene

Parameterform

Bp:



$$\vec{x} = \vec{p} + t \vec{a}$$

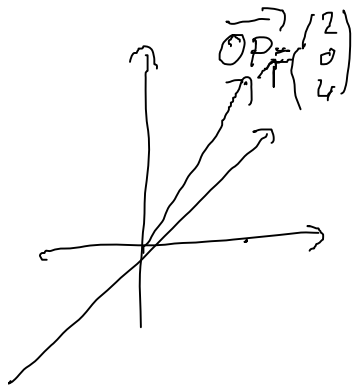
$$\vec{r}(P_1) = \vec{p} \quad \text{Ortsvektor}$$

$$\vec{r}(P_2) - \vec{r}(P_1) = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{a} \quad \text{Richtungsvektor}$$

$$\text{Zweipunktelform: } \vec{x} = \vec{r}(P_1) + t(\vec{r}(P_2) - \vec{r}(P_1))$$

Bsp: $P_1 = (2, 0, 4) \quad P_2 = (2, 2, 2)$

Liegt $Q = (2, -2, 6)$ auf der Geraden durch P_1 und P_2 ?



$$\begin{aligned} \text{Geradengleichung } \vec{g} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 2 - 0 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prüfen:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

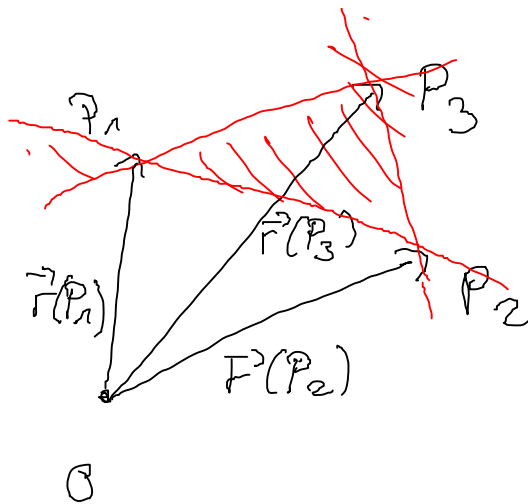
$$2 = 2 + t \cdot 0 \quad \checkmark$$

$$-2 = 0 + t \cdot 2 \quad \text{erfüllt für } t = -1$$

$$6 = 4 + t \cdot -2 \quad \text{erfüllt für } t = -1$$

$\Rightarrow$ Q liegt auf $\vec{g}$ (Gerade durch P_1 und P_2)

Analoge Betrachtungen für Ebenen:

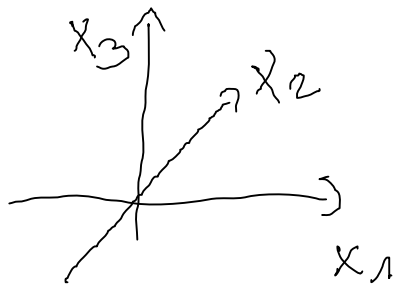


Ebene durch P_1, P_2, P_3

$$B_p: \vec{x} = \vec{r}(P_3) + \lambda (\vec{r}(P_2) - \vec{r}(P_3)) + \mu (\vec{r}(P_1) - \vec{r}(P_3))$$

Dreipunktform der Ebene

Anderer Darstellung



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

Koordinatenform

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Umrechnung Parametergleichung in Koordinatenform

$$\begin{aligned} X_1 &= \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \\ X_2 &= p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ X_3 &= p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}$$

Nach λ und μ auflösen und diese
durch x_1, x_2, x_3 ausdrücken

$$\text{Bsp: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Koordinatenform

Bitte zu Hause überprüfen!

Frage: Koordinatenform $\rightarrow$ Parameterform?

Bp: E: $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$

drei Ebenenpunkte bestimmen (Vorgabe x_1, x_2
 x_3 berechnen)

dann Vorgehen w.o.

Bitte überprüfen, ob z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$

eine Lösung ist

Weitere Darstellungsform für eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

Erinnerung : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Rechtssystem

$$\vec{n} \perp \vec{a} \quad \vec{n} \perp \vec{b} \quad (\text{v. Def. 3D-Vektorprodukt})$$

$$n_1 \cdot a_1 + n_2 a_2 + n_3 \cdot a_3 = 0 \quad \Rightarrow n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$n_1 \cdot b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0 \quad n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

damit kann für eine Ebene

der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ bestimmt werden

$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$|\vec{N}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{N} = 0$$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ein Punkt der Ebene, dann

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0$$

Hesse - Normalform der Ebene

falls $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auf dieser Ebene

Bp zum Selbststudium

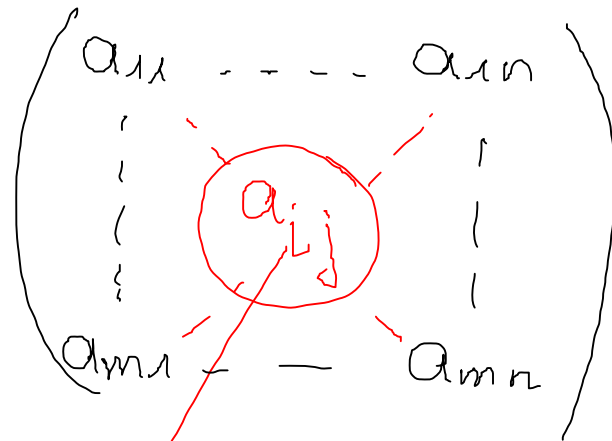
Gesucht die drei verschiedenen Darstellungen der Ebene,
die durch $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht und senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
steht.

Lösung: $4x + 2y + 5z = 13$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 5 \\ z - 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

Matrizenrechnung



in i -ten Zeile und j -ten Spalte

$(m \times n)$ - Matrix

Bp für Matrizen überall: Klimatabellen
Sporttabellen
Input/Output Tabellen

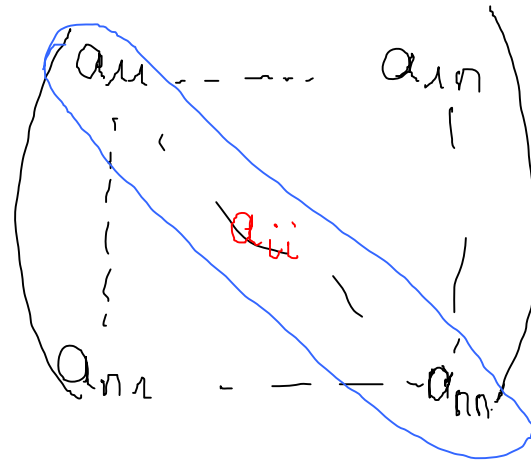
Bezeichnung i.a. mit großen Buchstaben A, B, C

Bp: A ist $m \times n$ -Matrix

Ordnungsrelation $A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}$ A, B $(m \times n)$ -Matrizen
für alle $i = 1, \dots, m$
 $j = 1, \dots, n$

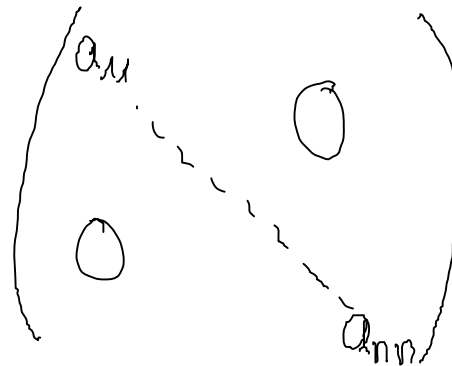
Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix $m = n$ Zeilenzahl = Spaltenzahl



Diagonale a_{ii}
Hauptdiagonale

Diagonalmatrix



$$a_{ii} \neq 0$$

$$a_{ij} = 0 \text{ falls } i \neq j$$

Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bp: Einheitsmatrix dreidimensional:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{besteht aus den Einheits-} \\ \text{Zeilenvektoren} \\ (100) \quad (010) \quad (001) \end{array}$$

bzw. aus den Einheits-
spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m \times n)\text{-Matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeilen $\rightarrow$ Spalten
Spalten $\rightarrow$ Zeilen

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1/3 & 1/2 & 10 \\ 5 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

(4×3) -M.

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 & 5 \\ 5 & 8 & 1/2 & 11 \\ -3 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

(3×4) -M.

Symmetrische Matrix

$$A \text{ symm.} \Leftrightarrow A = A'$$

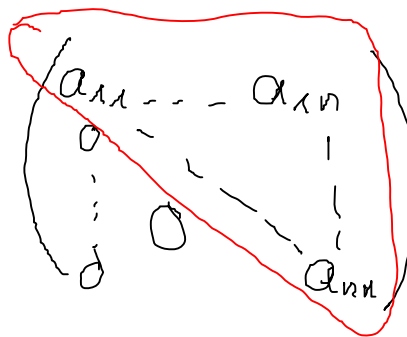
"Spiegelsymm." zur Hauptdiagonalen

Bp:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{2} & 7 & 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 0 & 2 & 7 \\ 4 & \sqrt{5} & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen

quadratische Matrizen



obere Dreiecksmatrix



Matrixoperationen

$$A \pm B = C$$

nur Matrizen gleicher Dimension

$\pm$ verläuft koeffizientenweise

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$\lambda A = C \text{ mit } c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$\text{Merke: } (A \pm B)' = A' \pm B'$$

Multiplikation von Matrizen.

Bp:

$$\begin{array}{c} \text{K} \quad \text{M} \quad \text{O} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix} \end{array}$$

(3×3) -Matrix

$$\begin{array}{c} \text{05} \quad \text{06} \quad \text{07} \quad \text{08} \\ \begin{matrix} K \\ M \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \end{array}$$

(3×4) -Matrix

Firmen A, B, C

Kleinwagen
Mittelklasse
Oberklasse } Wagen

Gewinne in Jahren 05-08
pro Wagen

Frage: Einnahmen der drei Firmen in 05 - 08

Bp: Firma A : $1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = C_{11}$
im Jahr 05 53.4 Mill.

	05	06	07	08
A	53.4	54.75	56.25	59
B	51.85	53.1	54.65	57.3
C	57.53	59.1	60.55	63.5

1. Zeile · 2. Spalte $1000 \cdot 10000 + 1500 \cdot 19500 + 500 \cdot 31000 = 54.75$
2. Zeile × 3. Spalte
3. Zeile × 4. Spalte
Skalarprodukt
 C_{34}

Weiter im Bp: $(3 \times 3) \cdot (3 \times 4)$

Spaltenzahl = Zeilenzahl

Ergebnismatrix hat die Dimension: 3×4

Bp.: Welche Dimension hat das Produkt einer

$$\begin{array}{ccc} (4 \times 7) & \cdot & (7 \times 9) \\ \text{Matrix} & & \text{Matrix} \end{array} = (4 \times 9) \text{ Matrix}$$

$$(7 \times 6) \cdot (6 \times 25) = (7 \times 25) \text{ Matrix}$$

$$(3 \times 7) \cdot (3 \times 7) = \text{keine Multiplik.}$$

$\neq$

Merke: $A \cdot B \neq B \cdot A$ Kommutativ gilt nicht

$$\text{Aber: } A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

Bp: Unternehmen produziert Produkte P_1 und P_2
in den Mengen x und y

$$\begin{array}{c} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{Mär} \end{array} \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Preise: $\begin{pmatrix} x & y \\ 50 & 90 \end{pmatrix}$ pro Stück

Aufgabe: Berechnen Sie die monatlichen Erlöse,
die monatlich benötigten Einzelteile, wenn

$$\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

benötigt werden.

Frohe Weihnachten

und einen guten Rucksch ins neue
Jahr!

