8. 1. 2014

Mathematik - Vorlesung

Ich wünsche allen ein gesundes, erfolgreiches und glückliches neues Jahr!

Die PROBEKLAUSUR finden Sie entweder

- im ILIAS

oder

- auf Seite Konen unter "Tabletaufzeichnungen"

Besonderheiten der Matrizenmultiplikation

$A^2 = A$, obwohl $A \neq E$ oder $A \neq O$

E: Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

O: Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B \cdot C = O$ obwohl $B \neq O$ und $C \neq O$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^2 = E$ obwohl $D \neq E$ und $D \neq -E$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ $D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Inverse einer Matrix

$ax = 1$ Gleichung in $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a} = \boxed{a^{-1}}$

Def: B heißt Inverse $\Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = E$

A, B quadratische Matrizen

A heißt regulär und $B = \boxed{A^{-1}}$

Es gibt auch quadr. Matrizen ohne Inverse:

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$a = 1 \qquad b = 0$ ↯

$a = 0 \qquad b = 1$

Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Beweis: Ann. A regulär und B, C seien zwei versch. Inverse

Dann gilt: $\underbrace{A \cdot C} = A \cdot B = \underbrace{B \cdot A} = E$

$$\boxed{B} = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C$$

$$= E \cdot C \boxed{= C}$$

Bsp: Allgemeine Berechnung der Inversen einer regulären (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} = 1 \qquad \mathrm{I}$$

$$a_{11} x_{12} + a_{12} x_{22} = 0 \qquad \mathrm{II}$$

$$a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} = 0 \qquad \mathrm{III}$$

$$a_{21} x_{12} + a_{22} x_{22} = 1 \qquad \mathrm{IV}$$

aus I, II : $x_{21} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_{11}$

in II ; $\boxed{(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21})} x_{11} = a_{22}$

etc. ...

$$\boxed{(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21})} x_{12} = -a_{12}$$

$$\boxed{(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21})} x_{22} = a_{11}$$

$$\boxed{(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21})} x_{21} = -a_{21}$$

Setze $D := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinante einer (2×2) Matrix

Also $A^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ mit $D \neq 0$.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

$D = 12 \cdot 11 - 20 \cdot 1 = 112$

$$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{112}\begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{112} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{1}{112} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $A \cdot A^{-1} = E$

Rechenregeln:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ökonomische Anwendung von Matrizen

Bp: Fa. Holzbau KG fertigt Wochenendhäuser der Typen Alb, Rhön, Taunus

$$\begin{array}{c} \\ \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \end{array} =: M$$

(3 x 4) – Matrix

Auftrag: $A := \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

(1 x 3) – Matrix

Materialbedarf für den Auftrag: $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix} \end{array}$

(1 x 4) – Matrix

$$A \cdot M = (5\ 6\ 12) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$(1 \times 3) \quad (3 \times 4)$ $\qquad 1 \times 4$

$$= \begin{array}{cccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \\ (139 & 162 & 134 & 391) \end{array}$$

$$P := \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Stahl} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Arbeit} \end{array}$$

Preisvektor

4×1

$M \cdot P$ = Herstellungskosten für je ein Haus

$3 \times 4 \quad 4 \times 1 \qquad 3 \times 1$

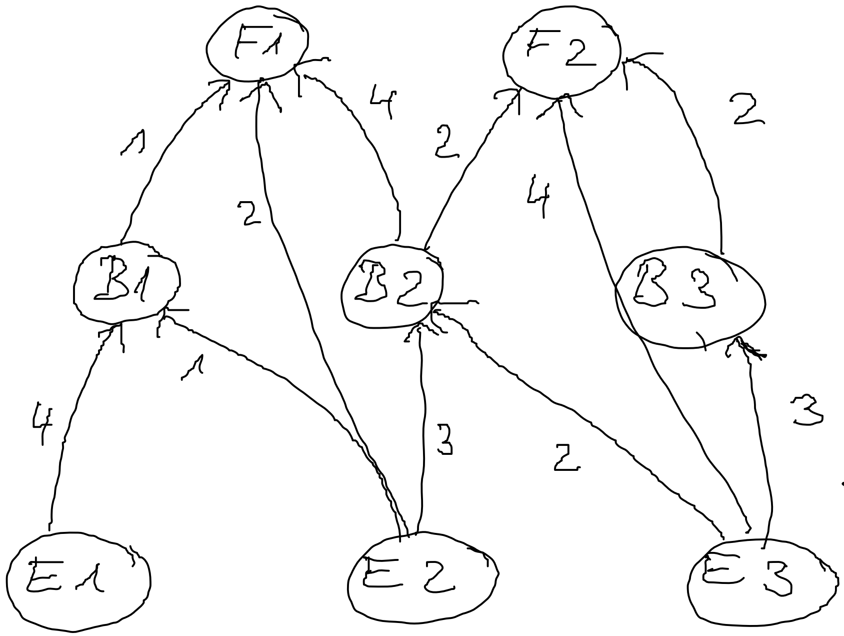
$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{array} \end{array}$$

Herstellungskosten für den Auftrag erhält man aus:

$$A(M \cdot P) = (A \cdot M) \cdot P = \underset{1 \times 4}{(139\ \ 162\ \ 134\ \ 391)} \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{1 \times 1}{17122}$$

Gozintograph



$$\underbrace{\text{"the part that goes into"}}_{\text{gozinto}}$$

$T :=$ Teilebedarfsmatrix

8×2

$$\begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F1 & F2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 15 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

Für die Bearbeitung stehen Maschinen M1 – M5 zur Verfügung

$$Z := \begin{array}{c|cccccccc} & F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \\ \hline M1 & & & 0,1 & & & 0,2 & 0.5 & \\ M2 & & & & 0.2 & & & 0,4 & 0,6 \\ M3 & & & & & 0.2 & 0.6 & & 0.1 \\ M4 & 0.6 & 0,1 & 0,2 & 0.4 & & & 0.3 & \\ M5 & & 0,7 & & 0.1 & 0,5 & & & 0.1 \end{array}$$

Belegungszeit

(5 × 8) – M.

leere Felder : 0

$$\underset{5\times 8}{A = Z} \cdot \underset{8 \times 2}{T} = \begin{array}{c|cc} & F1 & F2 \\ \hline M1 & 8,4 & 3 \\ M2 & 11.6 & 11.2 \\ M3 & 3,2 & 1,8 \\ M4 & 6,9 & 2,7 \\ M5 & 1,2 & 3,3 \end{array}$$

5×2

Netzwerkmatrizen

($\rightarrow$ SS 2014 Graphentheorie
Adjazenzmatrix später)
Inzidenzmatrix

Weiterer Hinweis: Lineare Abbildungen und Matrizen

$f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$

$y = A \cdot x$ A Matrix

(m×n)-M $\boxed{(n \times 1)}$-Vektor

y hat dann die Dimension $\boxed{(m \times 1)}$

Dimensionswechsel mittels Abbildung

Rang einer Matrix A

Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten heißt der Rang: $rg(A)$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A) = 2$

(→ später)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A) = 4$

Rangbestimmung einer Matrix

Geg.: A $(m \times n)$-Matrix

$\downarrow$ ← Umformungen, die die Matrix auf "Zeilenstufenform" bringen und damit linear abhängige Zeilen entfernen!

Ziel: B $(m \times n)$-Matrix

Solche Umformungen sind:

1) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile
3) Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeilen
4) Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile

Es gilt: Jede $(m \times n)$-Matrix kann durch endlich viele Umformungen der Art 1) – 4) auf Zeilenstufenform gebracht werden:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B_p: \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 16 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rg} = 3$$

(5×5)-Matrix

Bp. für Rangbestimmung:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3. Zeile} \times 2]{\text{1. Zeile} \times 7} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3. Zeile} + \text{1. Zeile}} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3. Zeile} \times 2]{\text{2. Zeile} \times 19}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3. Zeile} - \text{2. Zeile}]{} \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1.\ \text{Zeile} : 14 \\ 2.\ \text{Zeile} : 38 \\ 3.\ \text{Zeile} : -93}]{} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 3$$

Bp. s.o.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.\ \text{Zeile} + 2 \times 1.\ \text{Zeile}]{1.\ \text{Zeile} \times 2} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3.\ \text{Zeile} - 2.\ \text{Zeile} \\ 1.\ \text{Zeile} : -2 \\ 2.\ \text{Zeile} : 4}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

Zu Hause bearbeiten: Rang von $A =: \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$-Matrix $\quad (n \times 1)$-Matrix $\quad (m \times 1)$-Matrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Später schreiben wir nur noch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix