Mathematik

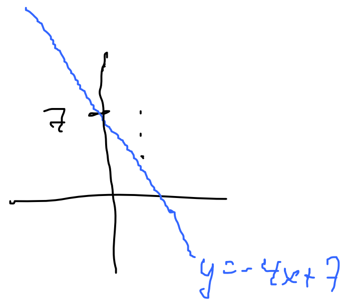
15.1.2014

Lineare GS

1 Gleichung, 2 Unbekannte z.B.: $y + 4x = 7$

$\Leftrightarrow y = -4x + 7$

∞ viele Lösungen



Lösungen alle auf der Geraden mit $y = -4x + 7$

1. Gl. $\quad y + 4x = 7 \quad \Rightarrow \quad y = -4x + 7$

2. Gl. $\quad 2y + 8x = 14 \quad \Rightarrow \quad 2y = -8x + 14 \quad \Rightarrow \quad y = -4x + 7$

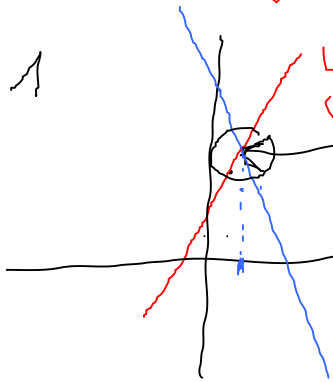
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 14 \end{array}\right) - 2 \times 1.Z \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Gleichung liefert keine neue Information!

2. Gleichung ist linear abhängig!

andere 2. Gleichung: $\quad y - 3x = 1$

$\Leftrightarrow \quad y = 3x + 1$



$y = 3x + 1$

$y = -4x + 9$

Der Schnittpunkt erfüllt beide Gl.

$\Rightarrow$ eine eindeutige Lösung!

$$y + 4x = 7$$
$$y - 3x = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) - 1.Z. \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow -7x = -6$$

$$x = \frac{6}{7}$$

Gauß'sche Lösungsalgorithmus
Gauß'sche Eliminationsverfahren

(Carl Friedrich Gauß 1777 – 1855)

Bp:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 16 \end{aligned}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right)$$

Vert.

Ziel:

Zeilenstufenform

durch äquivalente Umformungen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +1.Z. \\ -3\times 1.Z. \\ +2\times 1.Z \end{array}$$

Pivotelement Nr.1

1. Iteration

Auswahl einer Zeile

Auswahl einer Spalte

$\Rightarrow$ Pivotelement

Ziel: "Nullen" unter dem Pivotelement (Spalte)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :-2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2\times 2.Z \\ -6\times 2.Z \end{array}$$

Pivotelement Nr.2

2. Iteration

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array}\right) \quad : 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array}\right) \quad - 6 \times 3.Z.$$

3. Iteration

Pivotelement Nr. 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 42 \end{array}\right) \quad : 21$$

$$17 + \frac{12}{3} = 21$$

$$34 + \frac{24}{3} = 42$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\mathrm{I} & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\
\mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\
\mathrm{IV} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array} \Rightarrow 1 \cdot x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 2 \quad (*)$$

$(*)$ in $\overline{\mathrm{III}}$: $1 \cdot x_3 - \frac{2}{3} \cdot x_4 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow x_3 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x_3 = 0 \quad (**)$$

$(*)$ u. $(**)$ in $\overline{\mathrm{II}}$

$$x_2 - x_3 - \frac{5}{2} x_4 = -2$$

$$x_2 - 0 - \frac{10}{2} = -2 \Rightarrow x_2 = -2 + 5 = 3$$

$$(***)$$

(*), (**) u. (***) in I:

$$x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2x_4 = 3$$

$$x_1 + 0 + 0 + 2 \cdot 2 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 + 4 = 3 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

Die eindeutige Lösung des Lin. GS: $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{array}}$

Bei fortgesetzter "Erzeugung" von Nullen oberhalb der "1":

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} A \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \Rightarrow E \cdot \vec{x} = \vec{b}^* \end{array}$$

eindeutige Lösung

Historische Aufgabe

Barschaften $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\text{I} \quad 73 + x_1 + x_2 = 2 \cdot \left((x_1 + x_3) + (x_2 + x_3) \right)$$

$$\text{II} \quad 73 + x_1 + x_3 = 3 \cdot \left((x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) \right)$$

$$\text{III} \quad 73 + x_2 + x_3 = 4 \cdot \left((x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) \right)$$

$$\text{I}: \quad 73 + x_1 + x_2 = 2x_1 + 2x_3 + 2x_2 + 2x_3$$

$$73 + x_1 + x_2 = 2x_1 + 4x_3 + 2x_2 \quad | -x_1 - x_2$$

$$\boxed{73 = x_1 + x_2 + 4x_3}$$

$$\text{II} \quad \boxed{73 = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3}$$

III $\quad \boxed{73 = 8x_1 + 3x_2 + 3x_3}$

Erweiterte Koeffizientenmatrix :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \times 1.Z \\ -8 \times 1.Z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 20 & -30 & -365 \\ 0 & -20 & -116 & -2044 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3.Z + 2.Z} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 20 & -30 & -365 \\ 0 & 0 & -146 & -2409 \end{array}\right)$$

Auswertung $-146 \cdot x_3 = -2409 \quad | : -146$

$$x_3 = \frac{-2409}{-146} = 16.5 \text{ Gulden}$$

$$20 \cdot x_2 - 30 \cdot 16.5 = -365$$

$$x_2 = \frac{-365 + 30 \cdot 16.5}{20} = 6.5 \text{ Gulden}$$

$$x_1 + 6{,}5 + 4 \cdot 16.5 = 73$$

$$x_1 = 73 - 6.5 - 4 \cdot 16.5$$

$$= 0.5 \text{ Gulden}$$

Anwendung Linearer GS

Input / Output - Analyse an einem stark vereinf. Bsp

Fragen: 1) Welche Gesamtleistungen (Output) müssen Landwirtschaft, Ind I, Ind II erbringen für die geforderte Endnachfrage?

2) Stunden ~~Arb.~~ zeit + Lohn dafür nötig?

3) Berechnung Auswirkungen folgender Endnachfrageänderungen: Landw. +40 LE

Ind. I −70 LE

Ind II +18 LE

?

Lösung mit lin. GS

X_L : Gesamtleistung Landwirtschaft

X_1 : " Ind. I

X_2 : " Ind. II

Aufstellen einer Leistungsbilanz für jeden Wirtschaftszweig

$$x_L = 0{,}2x_L + 0{,}8x_1 + 800$$
$$x_1 = 0.3x_L + 0.4x_1 + 0{,}125x_2 + 1200$$
$$x_2 = 0{,}2x_L + 0{,}4x_1 + 0{,}25x_2 + 600$$

Gesucht: x_L, x_1, x_2

Umformung:
$$\begin{aligned} 0{,}8x_L - 0{,}8x_1 \phantom{- 0{,}125x_2} &= 800 \\ -0{,}3x_L + 0{,}6x_1 - 0{,}125x_2 &= 1200 \\ -0{,}2x_L - 0{,}4x_1 + 0{,}75x_2 &= 600 \end{aligned}$$

Lösen des lin. GS zur Beantwortung von Frage 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}8 & -0{,}8 & 0 & 800 \\ -0.3 & 0{,}6 & -0.125 & 1200 \\ -0.2 & -0.4 & 0.75 & 600 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ 3 Pivotoperationen (Auswahl Zeile
Auswahl Spalte
...)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3{,}75 & -3000 \\ 0 & 1 & -1{,}25 & -1333\,^1/_3 \\ 0 & 0 & 1 & 7600 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $x_2 = 7600$ LE

$x_1 = 8166\,^2/_3$ LE Antwort Frage 1

$x_L = 9166{,}66$ LE

Antwort Frage 2: $x_A = 0.04\,x_L + 0.08\,x_1 + 0{,}12\,x_2$

$= 0.04 \cdot 7600 + 0.08 \cdot 8166\,^2/_3 + 0{,}12 \cdot 9166{,}66$

$= 1932$ Zeiteinheiten

$x_{Löhne} = 2.6\,x_L + 4.3\,x_1 + 1{,}7\,x_2 = 71870$ WE

Antwort Frage 3: Neues, verändertes GS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.8 & -0.8 & 0 & 840 \\ -0.3 & 0.6 & -0.125 & 1130 \\ -0.2 & -0.4 & 0.75 & 618 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ neu durchrechnen

$$x_L = 8965$$

$$x_1 = 7915$$

$$x_2 = 7436$$

Mit diesen Lösungen, erhält man für $x_A = 1\,884{,}12$ ZE

$x_{Löhne} = 69\,984{,}7$ WE

Lineare GS und Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$m \times n \qquad n \times 1 \qquad m \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = \boxed{A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*}$$

Betrachtungen: $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te Komponente

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{e}_j}_{\text{j-te Spalte der Inversen}}$$

Simultane Lösung für alle j ergibt alle Spalten der Inversen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}$$

Man führt alle
äquivalenten
Umformungen
zur Einheitsmatrix
(auf der linken
Seite)
an der Einheitsmatrix
(auf der rechten Seite)
simultan durch
und erhält A^{-1}