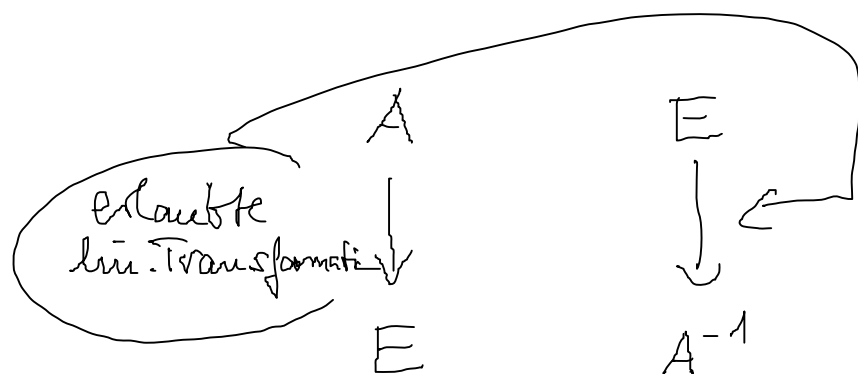


Mathematik 22.1.14

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}$$

↑
Lösungen



Bp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Gesucht:

$$A^{-1}$$

Ausgangssituation

$$\begin{array}{l} 2.Z : 2 \\ -2 \times 1.Z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2 \times 2.Z \\ + 3 \times 2.Z. \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$- 1/2 \cdot 3.Z \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E A^{-1}

Nachprüfen: $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A A^{-1} E

Fazit: Ein lin.-GS ist eindeutig lösbar

$\Leftrightarrow$ die Koeffizientenmatrix besitzt eine Inverse

Homogene lineare GS

$$A \cdot \vec{x} = 0$$

$\vec{x} = 0$ ist in jedem Fall Lösung und auch die einzige, wenn A den vollen Rang besitzt.

Determinante

Bereits kennen gelernt : $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Determinante einer
(2x2)-Matrix

Schreibweise für die Determinante von A :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -31$$

2-reihige Determinante

Determinante einer (3x3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \underline{a_{11}} \underline{a_{22}} \underline{a_{33}} + \underline{a_{12}} \underline{a_{23}} \underline{a_{31}} + \underline{a_{13}} \underline{a_{21}} \underline{a_{32}} \\ &- \underline{a_{13}} \underline{a_{22}} \underline{a_{31}} - \underline{a_{12}} \underline{a_{21}} \underline{a_{33}} - \underline{a_{11}} \underline{a_{23}} \underline{a_{32}} \end{aligned}$$

Vgl. (2×2) -Matrix

$$\det A = \underline{a_{11}} \underline{a_{22}} - \underline{a_{12}} \underline{a_{21}}$$

Rechenregel für 3-reihige Determinante: Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Bp: Berechnen Sie $\det A$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 3 & 6 \end{array}$$

$$40 + 0 + (-36) - 45 - 42 - 0$$

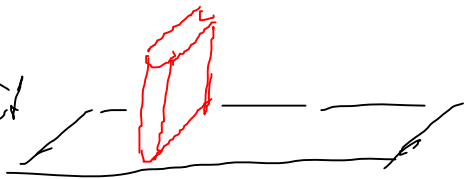
$$= 40 - 36 - 45 - 42 = -83$$

Die Determinante einer Matrix m -ter Ordnung

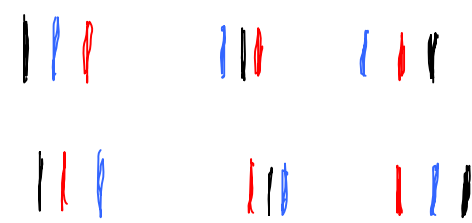
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{\underline{1}j_1} \cdot a_{\underline{2}j_2} \cdots a_{\underline{m}j_m}$$

Permutation = Anordnungsmöglichkeiten

1 1 Element $\Rightarrow$ 1 Möglichkeit 

2 2 Elemente $\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten 

6 3 Elemente $\Rightarrow$  6 Möglichkeiten

24 4 Elementen $\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten

$\vdots$

$$n \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n = n!$$

Anzahl der Permutationen
einer n -elementigen Menge

Zwischenübung:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 4 \cdot 5$$

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30}$$

3-reihige Determinante

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{22} & a_{33} & + & a_{12} & a_{23} & a_{31} & + & a_{13} & a_{21} & a_{32} \\ & & & + & & I(j)=2 & & + & & I(j)=2 & \\ \pm & a_{13} & a_{22} & a_{31} & \pm & a_{11} & a_{23} & a_{32} & \pm & a_{12} & a_{21} & a_{33} \\ - & & I(j)=1 & & - & & I(j)=1 & & - & & I(j)=1 & \end{array}$$

6 Summanden, da $P(j) = 3! = 6$

4-reihige Determinante

24 Summanden der Form $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$

der 2. Index hat bei 4 Stück 24 Anordnungen möglich.

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauscht man 2 benachbarte Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen

$$\det A_{P(i)} = (-1)^{I(i)} \cdot \det A$$

$$2) \det (\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$$

$$3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{21}^* & a_{22} + a_{22}^* & a_{23} + a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) Addition des λ -fachen einer Zeile zu anderen Zeile
 ändert den Wert der Determinante nicht

Bp: $\left\{ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} a_{11}(a_{22} + \lambda a_{12}) \\ - a_{12}(a_{21} + \lambda a_{11}) \end{array}$

λ fache der 1. Zeile
 zu 2. Zeile addiert

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{12}a_{11} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{12}a_{11}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



5) Sind Zeilen einer Determinante
linear abhängig, dann ist der Wert der Determinante
 NULL

$$\det A = 0$$

$$6) \quad \det A = \det A'$$

↑

Transponierte Matrix

Def: $|A|_{ij}$ Minor, entsteht wenn die i -te Zeile
und die j -te Spalte
gestrichen werden

$$\text{Bp: } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

insgesamt 9 Minoren

Adjunkte einer Determinante

Die Adjunkte zum Element a_{ij}

$$\text{ist } A_{ij} = (-1)^{i+j} |A|_{ij} \in \mathbb{R}$$

Zusammenfassen aller Adjunkten und bilden der Transponierten $\Rightarrow$ Adjungierte Matrix

$$A_{\text{ad}} = \begin{vmatrix} |A|_{11} & -|A|_{21} & |A|_{31} \\ -|A|_{12} & |A|_{22} & -|A|_{32} \\ |A|_{13} & -|A|_{23} & |A|_{33} \end{vmatrix}$$

Der Entwicklungssatz von Laplace

a) Entwicklung nach der Zeile i

$$\det A = \sum_{j=1}^m a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

b) Entwicklung nach der Spalte j

$$\det A = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

Bp:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 1. Zeile

$$2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 1 + 3) + (4 - 2) = 10 + 2 = 12$$

Entwickeln nach der 3. Spalte

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 2 + 4 + 4 = 12$$

Bp:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow -1 \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

selber weiterrechnen!

$$--- \det A = 0$$

Andere Vereinfachungsmöglichkeit:

Determinante durch Umformungen auf Treppenstufenform bringen (Achtung bei Vertauschen von Zeilen bzw. Multiplikation mit Skalar)

Sukzessives Entwickeln jeweils 1. Spalte

$$\text{Bsp: } \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{array} \right|$$

$$\downarrow \\ = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{mm}$$

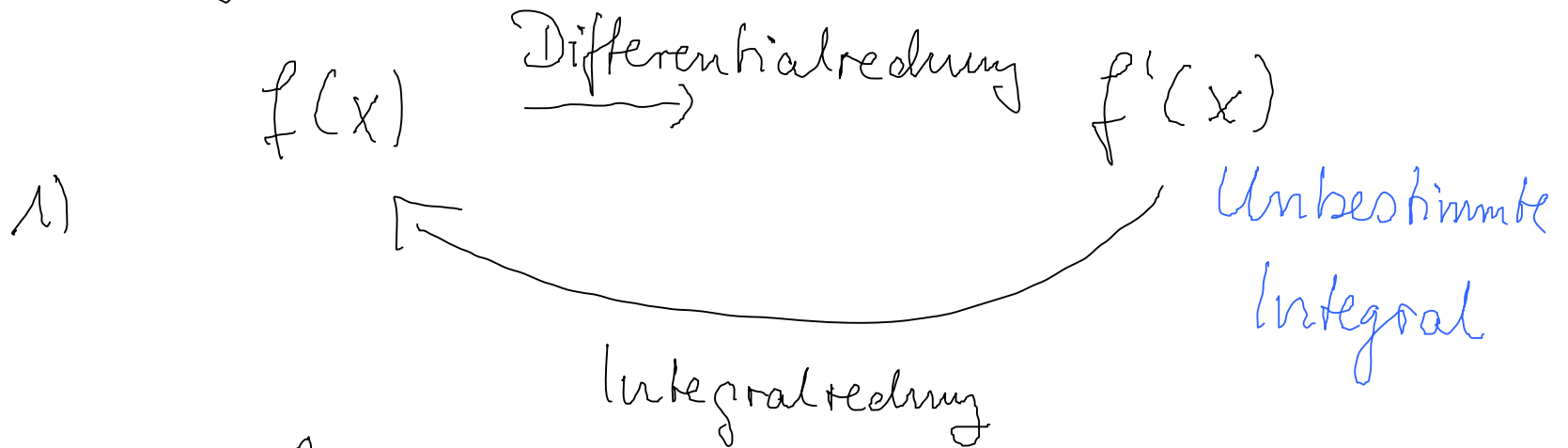
Das Umformen auf Dreiecksform nennt man :
Triangulieren

Berechnung des Inversen :

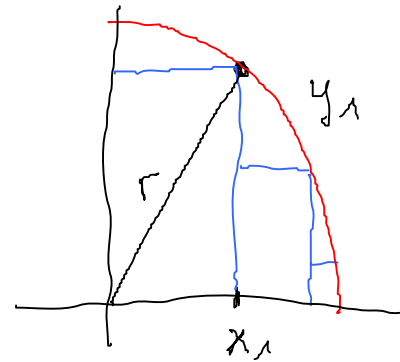
$$A^{-1} = \frac{A_{\text{ad}}}{\det A} = \frac{1}{\det A \neq 0} \cdot A_{\text{ad}}$$

Integralrechnung

2 Zugangsmöglichkeiten



Herleitung der Kreisfläche über Rechtecksflächen



Approximation der Kreisfläche
(hier $\frac{1}{4}$ Kreis)
durch Rechtecksflächen