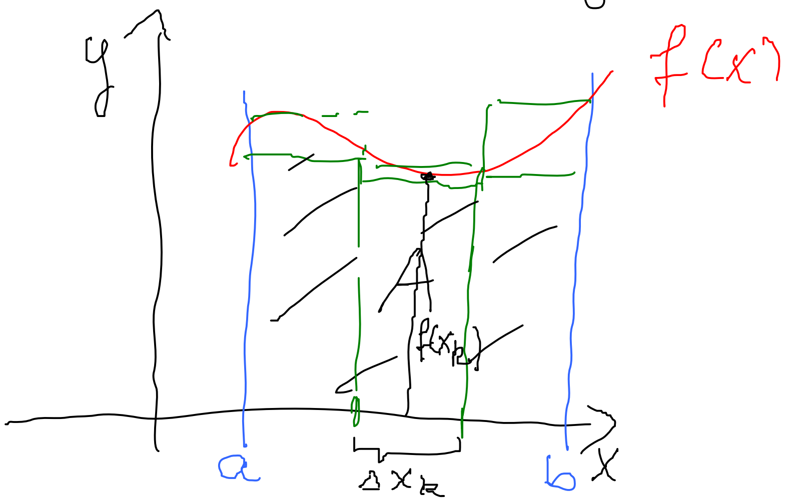
# Vorlesung Mathematik
29. 1. 2014

## Integralrechnung

### Das bestimmte Integral




Gesucht

1) Teilen des Intervalls $[a,b]$ in $n$ Teilstücke

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}}\,dx$$

$b$ ← obere Int.gr.

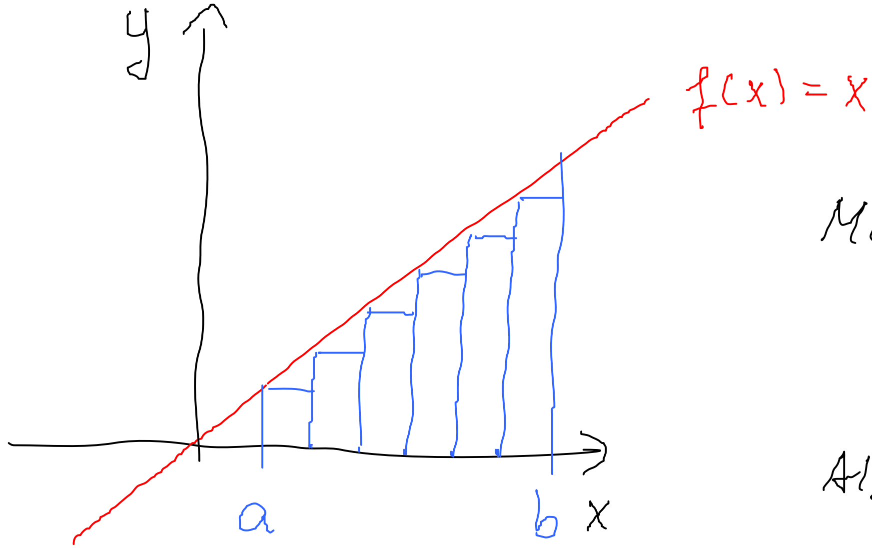
$a$ ← untere Int.grenze

$x$ Integrationsvariable

Bp. für die Berechnung eines best. Integrals mittels Definition

$f(x)=x$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx$$




Man wähle $\Delta x = x_k - x_{k-1}$

also $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Also $[a,b]$ wird in n gleiche Teilintervalle zerlegt!

Die Zerlegungspunkte sind $\boxed{x_k = a + k \cdot \Delta x}$

$(k = 0 \Rightarrow a)$

Zur Grenzwertbildung wird die Untersumme gewählt

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$$

da $f(x)=x$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(a+(k-1)\cdot \Delta x\right)}_{x_{k-1}} \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot \Delta x^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x}_{} + \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big( n \cdot a \Delta x + \Delta x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{\text{Summe der ersten } n-1 \text{ natürl. Zahlen}} \Big)$$

Nebenbem.:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big( \underbrace{\Delta x}_{= \frac{b-a}{n}} \Big( n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Big) \Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \Big( n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a) \Big( a + \frac{(b-a)}{2} \frac{(n-1)}{n} \Big)$$

für $n \to \infty$ $\longrightarrow 1$

$$= (b-a)\Big( a + \frac{b-a}{2} \Big)$$

$$= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Also $\displaystyle\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Grundregeln

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

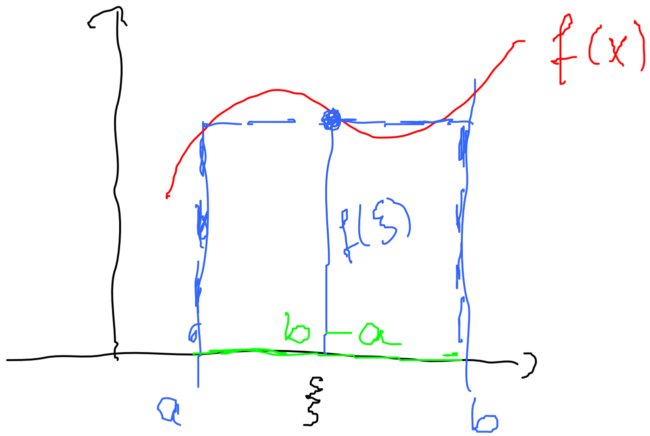
$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a<b<c$$

Zusammensetzen des Integrationswegs

$$\int_a^b \left(c\, f(x)\,dx + d\, g(x)\right) dx = c \int f(x)\,dx + d \int g(x)\,dx$$

# Mittelwertsatz der Integralrechnung




$$\xi \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

Fläche unter der Kurve auf $[a,b]$

Rechteck mit $A=(b-a)\cdot f(\xi)$

Intervalllänge

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ heißt der Mittelwert der Fkt. auf $[a,b]$

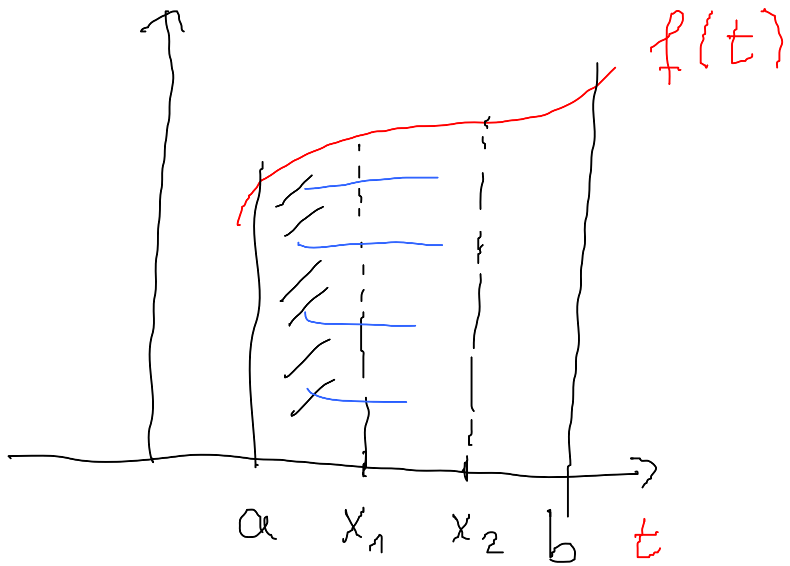
Zur Berechnung des bestimmten Integrals benötigt man den Begriff des unbestimmten Integrals

Gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

$F(x)$ bis auf Konstanten eindeutig,

daher aber "unbestimmt"




$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt \equiv$$

$$\int_a^{x_2} f(t)\,dt \equiv$$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Es gilt:

Die Differenz von $I_1 : x \longmapsto \int_{c_1}^x f(t)\,dt$

und $I_2 : x \longmapsto \int_{c_2}^x f(t)\,dt \qquad x, c_1, c_2 \in [a,b]$

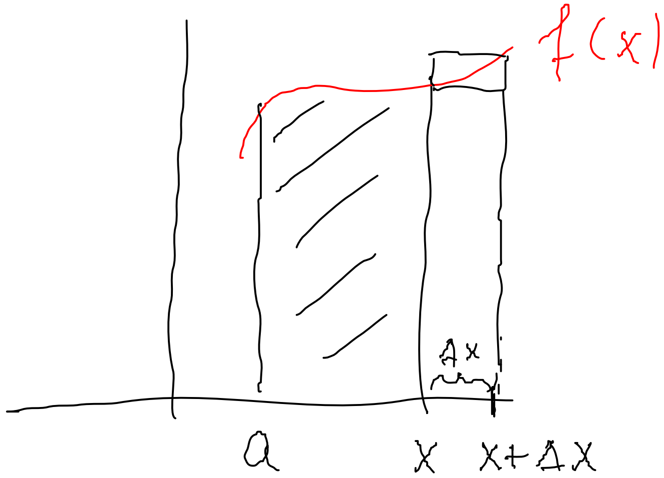
$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^x f(t)\,dt - \int_{c_2}^x f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^x f(t)\,dt + \int_x^{c_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$$ konstant, da „ohne" x

Sei nun:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$




$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$$

$$f(x)\cdot\Delta x \leq \Delta I \leq f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

kleine Rechteck

wahre Änderung

große Rechteck

$$\hookrightarrow \quad f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

$$\Delta x \to 0 \quad \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{f(x)} \le \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}}_{I'(x)} \le \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = I'(x)$$

Damit: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$

$$I'(x) = f(x)$$

Folgerung: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C$$

$$\Rightarrow C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

$x = b$: $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$

Rechenregel für bestimmte Integrale

Problem : Aufsuchen von $F$

Schreibweise : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

$= F(x)\Big|_a^b$

Stammfunktionen findet man über bekannte Ableitungen

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

## Integrationsmethoden – Regeln 1) Produktintegration

Herleitung: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' \overset{\text{Produktregel}}{=} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$f(x)\cdot g'(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f'(x)\cdot g(x)$$

Integration auf beiden Seiten

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx}$$

Produktintegration = partielle Integration

Bp: 1) $\int x^2\cdot e^x\, dx$

$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$

$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \underbrace{\int 2x \cdot e^x \, dx}_{\text{erneute partielle Integration}}$$

mit $f(x) = 2x \quad f'(x) = 2$

$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$

$$2x \cdot e^x - \underbrace{\int 2 \cdot e^x \, dx}_{2e^x}$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \left(2x \cdot e^x - 2e^x\right)$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

2) $\int \overset{f(x)}{\sin x} \cdot \overset{g'(x)}{\cos x}\, dx$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$g'(x) = \cos x$

$g(x) = \sin x$

$\int \sin x \cos x \, dx = (\sin x)(\sin x) - \int \cos x \cdot \sin x \, dx \quad \Big| + \int \cos x \sin x \, dx$

$2 \int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x \quad \Big| : 2$

$\int \sin x \cos \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

zu Hause: $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$

$= ?$

# Integration durch Substitution

Ausgang: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bp: $\int \Big( \underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{z} \cdot \underbrace{2x \Big) \, dx}_{dz}$

Substitution: $z = x^2+2 \Longrightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2x$

$\Longrightarrow dz = 2x \, dx$

$$\int \sqrt{z} \, dz = \int z^{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} (x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubst.

Bp: $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$

$z = 2x+3$

$\frac{dz}{dx} = 2 \qquad dz = 2\,dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$

$= \frac{1}{2}\ln|z| \underset{\text{Rücks.}}{=} \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$

Bp: $\int x \cdot e^{-x^2}\,dx$

$z = -x^2$

$\frac{dz}{dx} = -2x$

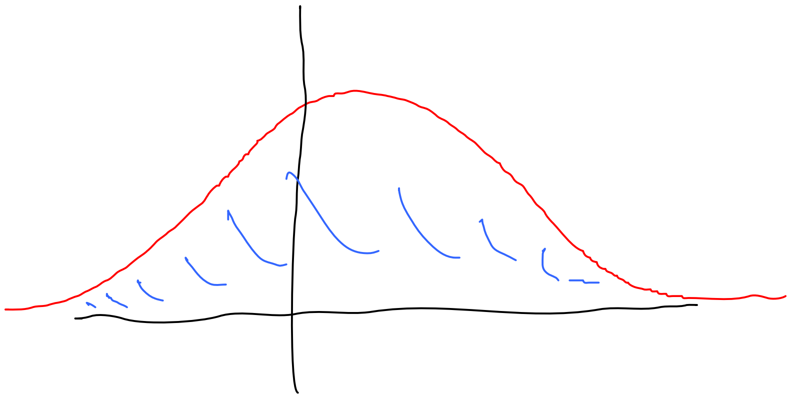
$dx = \frac{dz}{-2x}$

$-\frac{1}{2}\int e^{z}\,dz$

$$= -\frac{1}{2} e^{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rücksubst.}}}{=} -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Nur erwähnt: Integration gebrochenrationaler Fkt. mittels Partialbruchzerlegung

## Uneigentliche Integrale



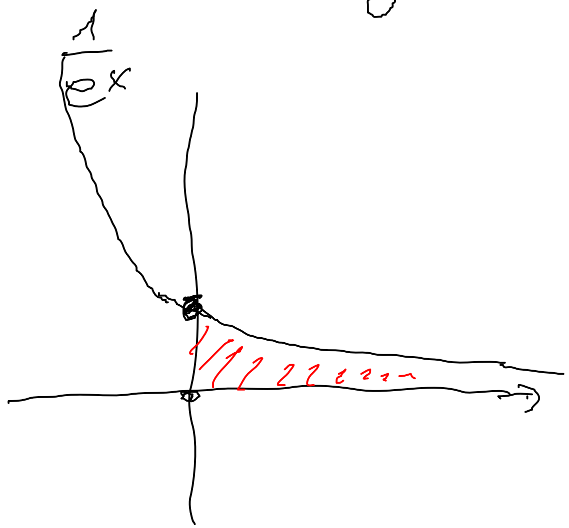
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

heißt das uneigentliche Integral

$$\lim_{\substack{a_n \to -\infty \\ b_n \to +\infty}} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$$

Зр:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

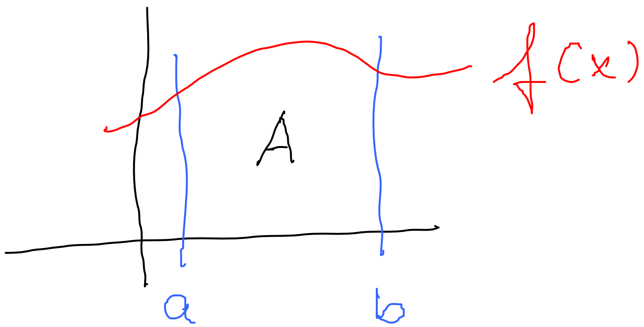



$$= \lim_{b \to \infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-b} + e^0\right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{e^b}}_{0} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

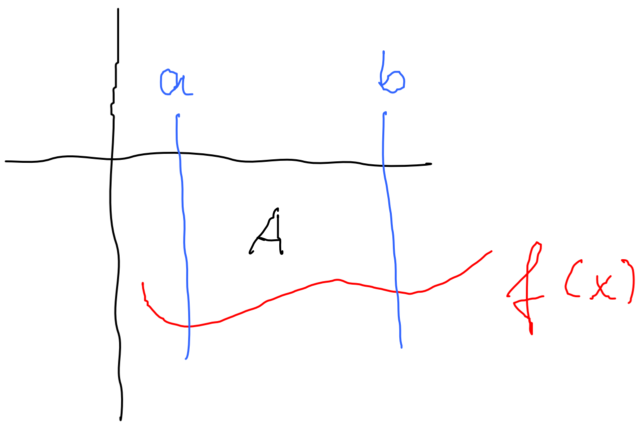
# Anwendungen

1) Flächeninhalt

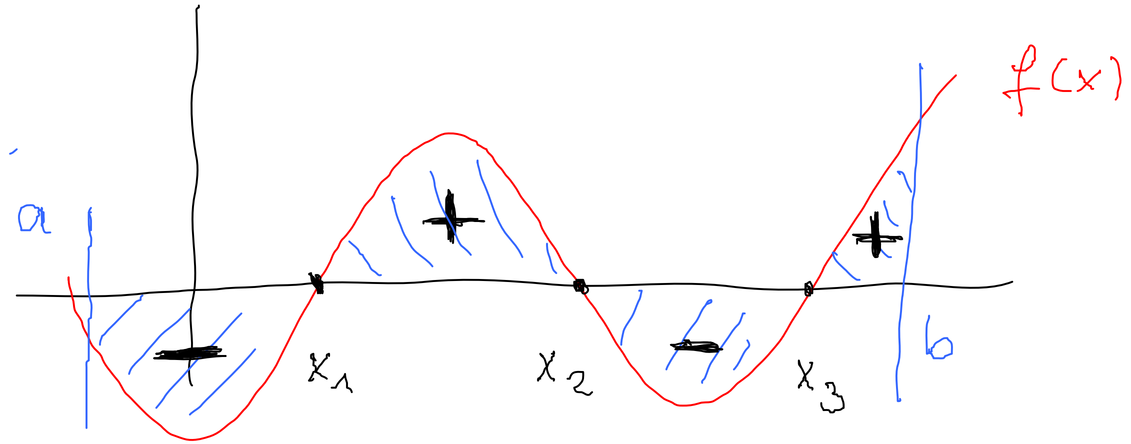



$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

$f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$



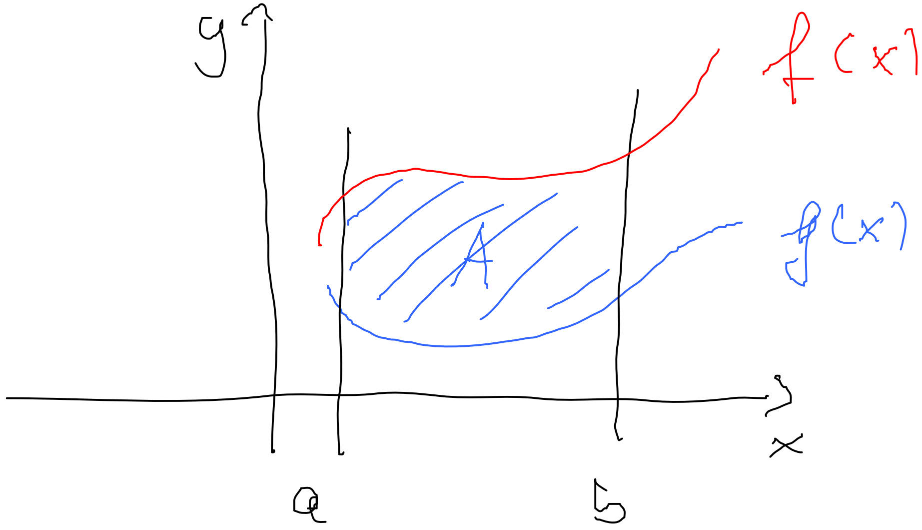

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$



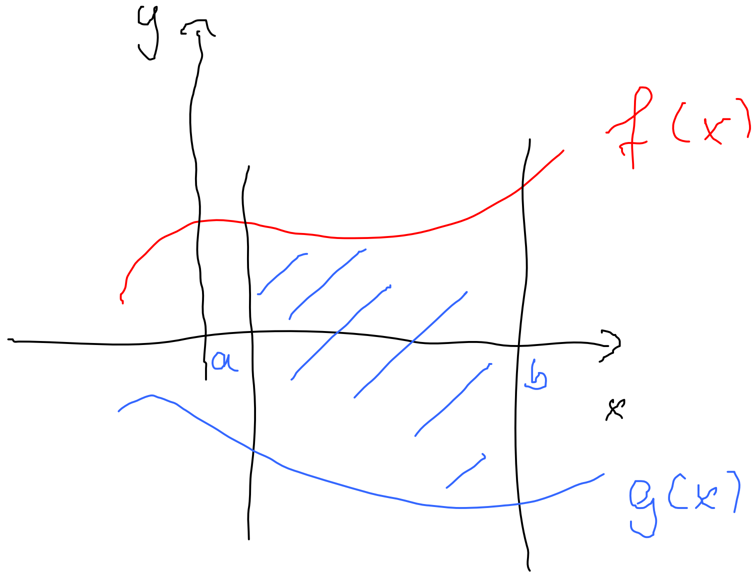

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Bp für zu Hause: $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ Fläche!

# Flächen zwischen 2 Kurven

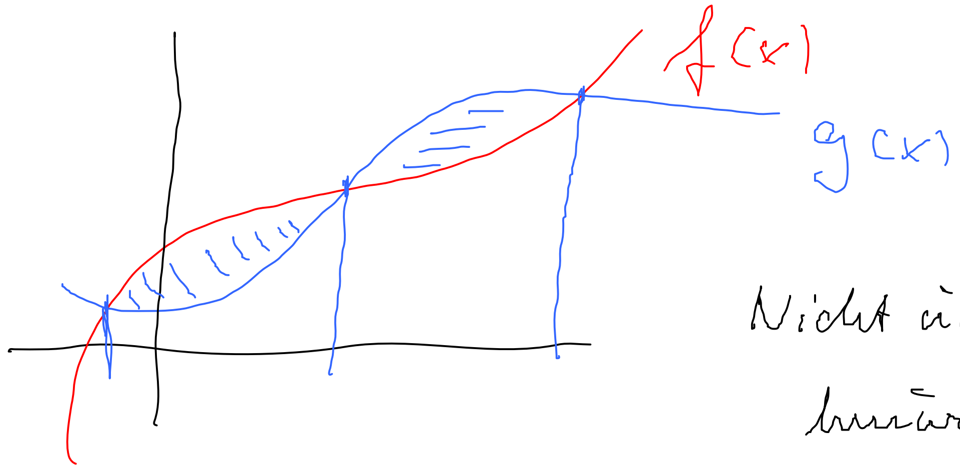



$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



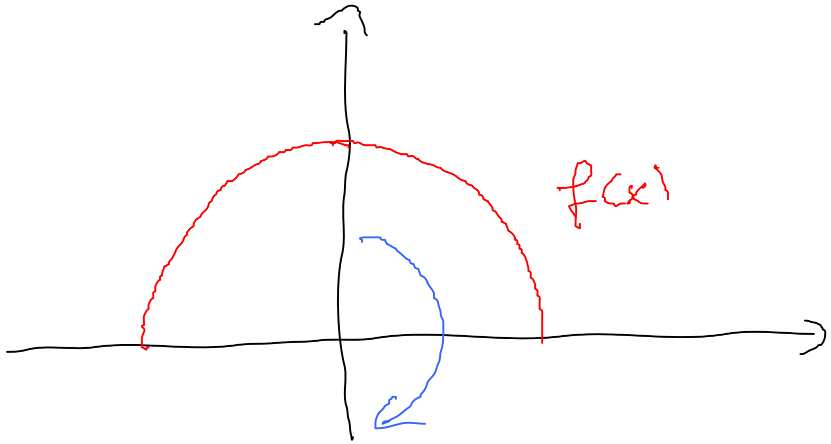

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Achtung:



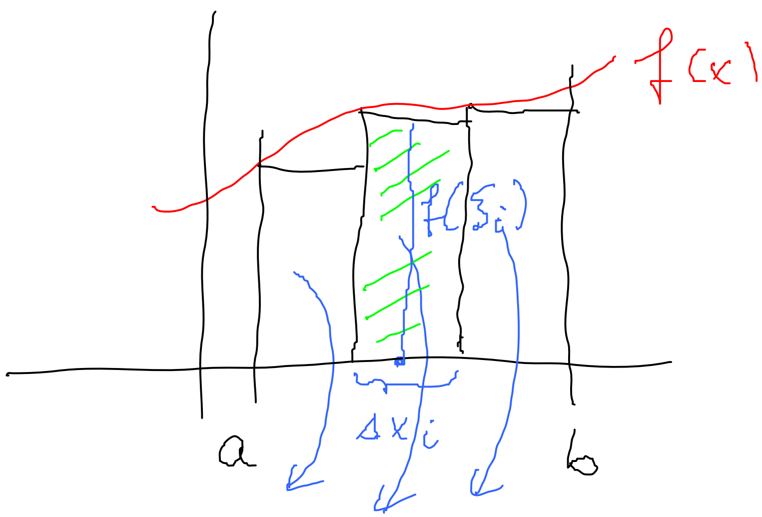

Nicht über die Schnittpunkte hinweg integrieren!

## Rotationsvolumen




es entsteht eine Kugel

Herleitung




$$\boxed{\Delta V_i} = \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

Radius

Höhe des Zylinders

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$