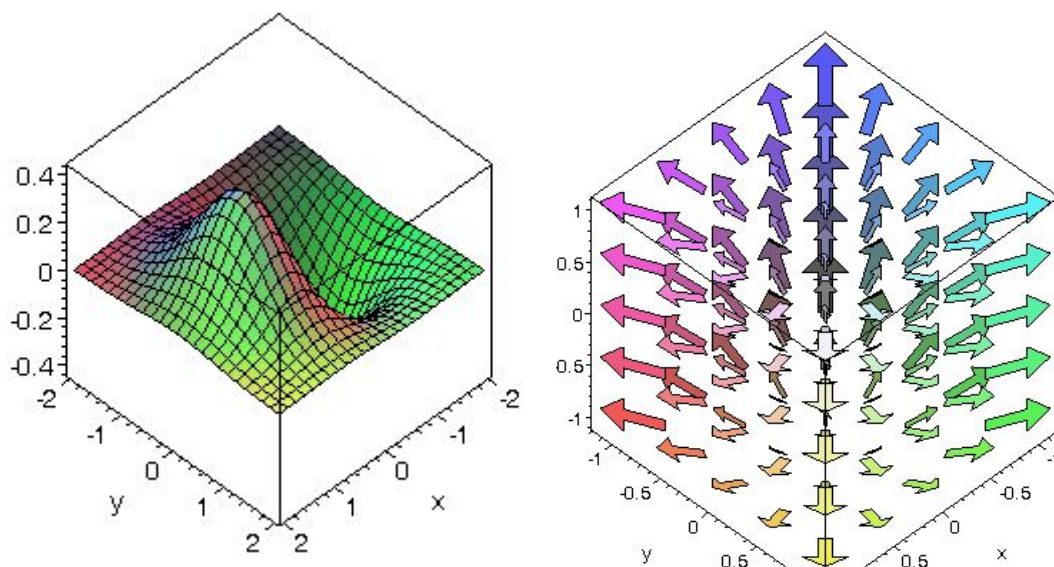
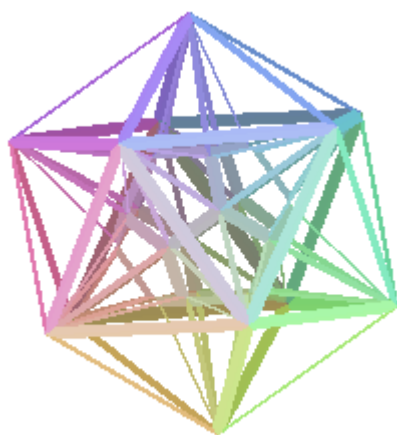


# Skript Mathematik 1

## WS2013/14



Prof. Dr. Wolfgang Konen  
FH Köln, Institut für Informatik



# Inhaltsverzeichnis

|        |                                                           |    |
|--------|-----------------------------------------------------------|----|
| 0      | Einleitung .....                                          | 4  |
| 0.1    | Brauchen Informatiker/innen Mathematik? .....             | 4  |
| 1      | Aussagenlogik und Mengenlehre.....                        | 5  |
| 1.1    | Wozu Informatiker Aussagenlogik brauchen .....            | 5  |
| 1.2    | Aussagenlogik.....                                        | 5  |
| 1.2.1  | Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis).....               | 7  |
| 1.3    | Mengen .....                                              | 8  |
| 1.4    | Relationen und Abbildungen.....                           | 9  |
| 1.5    | Where to go from here .....                               | 12 |
| 2      | Zahlsysteme.....                                          | 13 |
| 2.1    | Natürliche Zahlen.....                                    | 13 |
| 2.2    | Ganze und rationale Zahlen.....                           | 16 |
| 2.3    | Reelle Zahlen.....                                        | 18 |
| 2.3.1  | Schreibweisen für Zahlmengen und Intervalle.....          | 21 |
| 2.4    | Potenzen, Wurzeln und Logarithmen reeller Zahlen.....     | 21 |
| 2.4.1  | Spezielle Funktionen .....                                | 25 |
| 2.5    | Gleichungen und Ungleichungen.....                        | 26 |
| 2.6    | Modulare Arithmetik .....                                 | 29 |
| 2.6.1  | Prüfziffern .....                                         | 30 |
| 2.7    | Binomialkoeffizient und Summenzeichen .....               | 31 |
| 2.7.1  | Rechnen mit Summen .....                                  | 31 |
| 2.7.2  | Fakultät und Binomialkoeffizienten .....                  | 32 |
| 2.7.3  | Binomischer Satz.....                                     | 33 |
| 2.8    | Fazit .....                                               | 34 |
| 3.     | Zahlenfolgen .....                                        | 35 |
| 3.1.   | Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen.....               | 35 |
| 3.2.   | Definition und Eigenschaften von Folgen .....             | 36 |
| 3.3.   | Grenzwert einer Zahlenfolge.....                          | 37 |
| 3.3.1. | Landausche $O()$ -Notation .....                          | 42 |
| 3.4.   | Fazit zu Folgen .....                                     | 44 |
| 4.     | Reelle Funktionen .....                                   | 45 |
| 4.1.   | Warum Informatiker Funktionen brauchen.....               | 45 |
| 4.2.   | Verkettung von Funktionen und Umkehrfunktion.....         | 47 |
| 4.3.   | Grenzwert einer Funktion.....                             | 50 |
| 4.4.   | Stetigkeit einer Funktion .....                           | 54 |
| 4.5.   | Fazit .....                                               | 58 |
| 5.     | Differentialrechnung .....                                | 59 |
| 5.1.   | Wozu Informatikerinnen Differentialrechnung brauchen..... | 59 |
| 5.2.   | Differenzierbarkeit, Ableitung, Differential.....         | 59 |
| 5.3.   | Ableitungsregeln .....                                    | 63 |
| 5.4.   | Satz von Taylor .....                                     | 68 |
| 5.5.   | Regeln von de l'Hospital .....                            | 72 |
| 5.6.   | Eigenschaften differenzierbarer Funktionen .....          | 74 |

|        |                                                          |     |
|--------|----------------------------------------------------------|-----|
| 5.6.1. | Monotonie und Krümmungsverhalten .....                   | 74  |
| 5.6.2. | Extremwerte.....                                         | 74  |
| 5.6.3. | Wendepunkte.....                                         | 77  |
| 5.7.   | Fazit .....                                              | 79  |
| 5.7.1. | Kurvendiskussion.....                                    | 79  |
| 5.7.2. | Wichtige Ergebnisse dieses Kapitels .....                | 79  |
| 6.     | Lineare Algebra.....                                     | 80  |
| 6.1.   | Wozu Informatikerinnen Lineare Algebra brauchen.....     | 80  |
| 6.2.   | Matrizen .....                                           | 80  |
| 6.3.   | Rechenregeln für Matrizen.....                           | 83  |
| 6.4.   | Vektoren.....                                            | 86  |
| 6.4.1. | Skalar- und Vektorprodukt .....                          | 89  |
| 6.4.2. | Geraden- und Ebenengleichungen.....                      | 91  |
| 6.4.3. | Drehungen .....                                          | 93  |
| 6.5.   | Determinanten .....                                      | 94  |
| 6.6.   | Lineare Gleichungssysteme.....                           | 99  |
| 6.6.1. | Lösbarkeit von Gleichungssystemen .....                  | 99  |
| 6.6.2. | Äquivalente Umformungen und Gauß-Verfahren .....         | 102 |
| 6.6.3. | Berechnung der Inversen Matrix.....                      | 104 |
| 6.6.4. | Lineare Unabhängigkeit.....                              | 105 |
| 6.6.5. | Anwendungsbeispiel Ausgleichsgerade (Least Square) ..... | 105 |
| 6.7.   | Fazit Lineare Algebra.....                               | 107 |
| 7.     | Integralrechnung .....                                   | 108 |
| 7.1.   | Warum Informatiker Integralrechnung brauchen .....       | 108 |
| 7.2.   | Das bestimmte Integral .....                             | 108 |
| 7.3.   | Stammfunktion .....                                      | 111 |
| 7.4.   | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....   | 112 |
| 7.5.   | Integrationsregeln .....                                 | 114 |
| 7.6.   | Uneigentliche Integrale .....                            | 116 |
| 7.7.   | Geometrische Anwendungen der Integration .....           | 118 |
| 7.8.   | Fazit Integrale .....                                    | 119 |

## 0 Einleitung

*"Die Wahrheit hat tausend Hindernisse zu überwinden, um unbeschädigt zu Papier zu kommen und von Papier wieder zu Kopf."*

*[Georg Christoph Lichtenberg, Physiker und Schriftsteller, 1742-1799]*

### 0.1 Brauchen Informatiker/innen Mathematik?

Wieviel Mathematik braucht ein Informatiker? Der Spruch hierzu:

*„Der Informatiker braucht nur 20% der Mathematik, die er auf der Hochschule lernt - nur man weiß nicht von vornherein, welche 20% des Stoffes das sind“.*

Weitere Aspekte :

- Mathematik soll das Lösen von Problemen einüben. Dabei ist der Inhalt der Probleme gar nicht entscheidend.
- Der Informatiker sollte aber die Sprache der Mathematik so weit beherrschen, dass er Fragen mit einem Mathematiker besprechen kann. Dazu muss er dessen Sprache ausreichend beherrschen, wie auch umgekehrt der Mathematiker die Sprache des Informatikers kennen sollte.
- Haben Sie schon einmal erlebt, dass einer durch Zuhören in Konzerten das Klavierspielen lernt? Nein? – Eben, genauso ist es mit Mathematik: Mathematik **lernt** man vor allem durchs **Üben**. Darum ist eine regelmäßige Bearbeitung der Übungsaufgaben wichtig für den Erfolg.
- Mathematik lernt man auch durch **Fragen!** Also: **Fragen Sie viel!**  
Hierzu eine Anekdote: von [Isaac Rabi](#) (Physik-Nobelpreisträger 1944, für Experimente zur Kernspinresonanz, NMR):

*My mother made me a scientist without ever intending to. Every other Jewish mother in Brooklyn would ask her child after school: So? Did you learn anything today? But not my mother. "Izzy," she would say, "did you ask a good question today?" That difference — asking good questions — made me become a scientist.*

[en.wikiquote.org/wiki/Isidor\\_Isaac\\_Rabi](http://en.wikiquote.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi)

- Keine Anwesenheitspflicht in den Vorlesungen. Trotzdem: In der Mathematik bauen viele Dinge auf einander auf, so dass eine regelmäßige Anwesenheit dem Verständnis durchaus dient.
- Dieses „Skript in Stichworten“ soll weder Lehrbücher noch den Besuch der Vorlesung ersetzen. Vorlesung und Übung bringen viele zusätzliche Beispiele. Das Skript soll Ihnen bei der Nachbereitung des Stoffes als „roter Faden“ dienen.

*[adaptiert nach H. Siebert, Skript "Mathe für Ingenieure", FH Gießen, 2003]*