Übungsblatt 2

Summen und Folgen

Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) – entfällt –

b) Man berechne $\sum_{k=1}^{201}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=4}^{204}\frac{1}{k-2}$

c) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{150}(k+4)^3-\sum_{k=5}^{20}(k-1)^3$, wenn $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ gilt.

Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

a) $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{10}(k-2)\cdot i$, b) $\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=-5}^{5}\ln(k)\cdot i$, c) $\sum_{k=2}^{6}\sum_{i=0}^{4}(ki-2i+3k-6)$

d) $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\left[(k\cdot i)^{-2}+(k\cdot i)^{+2}\right]$

Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis n=6 auf und berechnen Sie damit $(a-b)^6$.

Folgen

Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte g der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$a_n=\frac{5n+1}{1-2n},\qquad a_n=\left(2+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right),\qquad a_n=\left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^3$$

$$a_n=\frac{4\cdot 10^{2n}-9\cdot 10^{n}}{4\cdot 10^{n-1}-20\cdot 10^{2n-1}}$$

b) $a_n=n\left(\ln n-\ln(n+3)\right)$ Hinweis:Benutzen Sie $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

c) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 3}{(2n+3)\cdot\binom{n}{2}}$

d) (+) Betrachten Sie die allgemeine ganzrationale Folge

$$X_n = \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \ldots + \beta_0}$$

für beliebige Koeffizienten α_k, $\beta_j \in \mathbf{R}$ und natürliche Exponenten $k,j \in \mathbf{N}$. Stellen Sie eine allgemeine Formel für $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ auf.

Hinweis: g.P.i.N. benutzen und evtl. Fallunterscheidung machen!

Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{1+3n} + \dfrac{n^2}{1-n}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\binom{n}{3}}{(n+3)n(n-1)} + \left(\dfrac{n^2}{1+n} + \dfrac{n^2}{1-n}\right)\right)$

(Hinweis: Aufgabe (b) ist original einer früheren Klausur entnommen)

Aufgabe 2.6 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration[1] eine näherungsweise Lösung (auf 1 Nachkommastelle genau) der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a) $x \ln x = 50$ b) $\ln x = \sqrt{x+1} - 5$ c) $\ln x = \sqrt{x^2 + 1}$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als ± 0.1 auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* Arten aus, nach x aufzulösen. Was funktioniert, was nicht?

Aufgabe 2.7 Eulersche Zahl e (+)

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ eine alternative Formel für die Eulersche Zahl

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ist!

HINWEIS: Binomischer Satz.

---

[1] Bringen Sie also die Gleichung in eine Form x = g(x) (*mehrere* Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte x_0 und bilden Sie die rekursive Folge $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = \ldots$

Testen Sie (mit Excel oder Maple) aus: Welche der beiden Formeln konvergiert schneller?

Aufgabe 2.8 O()-Notation und Laufzeitverhalten

Finden Sie die jeweils „beste" O()-Abschätzung aus der Menge
$\{ O(1), O(\lg(n)), O(n), O(n \lg(n)), O(n^2), O(2^n) \}$

a) 3 b) $3n(n + \mathrm{ld}(n))$ c) $5n^2 + n \sin(n)$ d) $\sqrt{n} + 2^{n+1}$

e) Ein Paketdient liefert pro Tag 2000 Pakete aus und optimiert den Weg der Boten mit einem Programm. Die Rechenanlage ist bei 2000 Paketen an ihrer Grenze. Sie soll erneuert werden, zumal die Firma um 10% wachsen möchte. Um wie viel schneller muss der neue Rechner sein, wenn der Optimierungsalgorithmus von der Ordnung
(i) $O(n^2)$ (ii) $O(2^n)$ ist?

(noch) Zahlsysteme

Aufgabe 2.9 Modulare Arithmetik / Prüfziffern

a) Berechnen Sie möglichst effizient und **ohne** Taschenrechner
   (i) $(101 \cdot 234) \bmod 5$ (ii) $(38 + 22 \cdot 17) \bmod 4$
   (iii) $(6 + 27 \cdot 8^{1000}) \bmod 7$ (iv) $(2^{50} + 38) \bmod 4$ (v) $(2^{50} + 38) \bmod 7$

b) Zeigen Sie, dass 0-8176-4176-9 eine gültige ISBN ist.

c) Ein Einzelfehler passiert an der zweiten Stelle, und es wird daher die ISBN 0-1176-4176-9 eingegeben. Wird der Fehler erkannt?

d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-1x76-4176-9 wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?