

Übungsblatt 4 Differentialrechnung

Aufgabe 4.1 Ableitungen

Geben Sie die 1. Ableitung an

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)(x-3)} \quad x \neq -1, 3$$

$$(b) f(x) = e^{\sin(x^2)} + e^{\sin^2 x}$$

$$(e) f(x) = x^x$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{1 + e^{-c \cdot x + d}} \quad \text{mit } c > 0$$

Aufgabe 4.2

In welchen Intervallen ist $f(x)$ (streng) monoton fallend / wachsend?

In welchen Intervallen ist $f(x)$ konvex / konkav?

Wie oft ist $f(x)$ stetig differenzierbar?

$$a) f(x) = -x^3 - 4x + 1$$

$$b) f(x) = \sin(x) \cos(x)$$

$$c) f(x) = (2H(x) - 1) \cdot x^3 \quad \text{mit} \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Plots in Maple!

Hinweis: Argumentieren Sie mit 1. bzw. 2. Ableitung. Evtl. vorher $f(x)$ in „günstige“ Form bringen!

Aufgabe 4.3 Taylor-Polynom

(a) Man bestimme das Taylorpolynom zu $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 4!
Wie genau ist dieses Polynom $P_4(x)$ für $x = 0.4$?

(b) Man bestimme das Taylorpolynom zu $g(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 2!
Wie genau ist dieses Polynom $P_2(x)$ für $x = -0.2$?

Aufgabe 4.4 L'Hospital

Arbeiten Sie die Informationen in Kapitel 5.5 des Skriptes durch, überprüfen Sie die Voraussetzungen des Satzes von L'Hospital und berechnen Sie damit folgende Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x.$$

HINWEIS zu (d): Hier muss man erst geeignet umformen, dass ein Ausdruck $\frac{f(x)}{g(x)}$ entsteht. Von den zwei möglichen Arten, dies zu tun, hilft nur eine wirklich weiter!

Aufgabe 4.5 Kurvendiskussion

Führen Sie für folgende Funktionen eine verkürzte Kurvendiskussion durch

- max. Definitionsbereich,
- Grenzwertverhalten bei $\pm\infty$ und bei Definitionslücken,
- Extremstellen,
- Wendepunkte,
- zum Abschluss qualitative Skizze der Funktion machen

(a) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-cx}}$ mit $c > 0$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Maple!

Aufgabe 4.6 Extremwerte 1: Dosen

Ein Dosenfabrikant möchte Tomatensuppe im Volumen V je Dose möglichst kostengünstig in zylindrische Konservendosen verpacken (Höhe h , Radius r). Welches Verhältnis h/r wählt er, um die Blechmenge je Dose zu minimieren?

Aufgabe 4.7 Extremwerte 2: Kugel + Kegel

Gegeben ist eine Kugel mit Radius R . Bestimmen Sie die Höhe h des dieser Kugel eingeschriebenen Kegels so, dass der Kegel maximales Volumen besitzt.

HINWEIS: Machen Sie eine Skizze und versuchen Sie, mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über die Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck zum richtigen Ansatz zu kommen.