Mathe V 15.10.2014

Ma 1 Tutorium Do $15^{30} - 17^{00}$ R2.108
(Steffen Weber, Alex Zautke)

Ma 1 Übungen

Di 11^{00} ~ 100 Teilnehmer

Di 17^{00} ~ 9 Teilnehmer

Mi 12^{00} ~ 100 "

Ma 1 Praktikum startet ab 27.10.

Staffelplan: ab Do 16.10. im ILIAS

Gleichungen / Ungleichungen

"Beweis" $2 = 3$?

$$x = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad | \cdot 2, \ \cdot 3$$

$$2(x-1) = 0$$

$$3(x-1) = 0 \quad | \ominus$$

$$2(x-1) - 3(x-1) = 0 \quad | :(x-1)$$

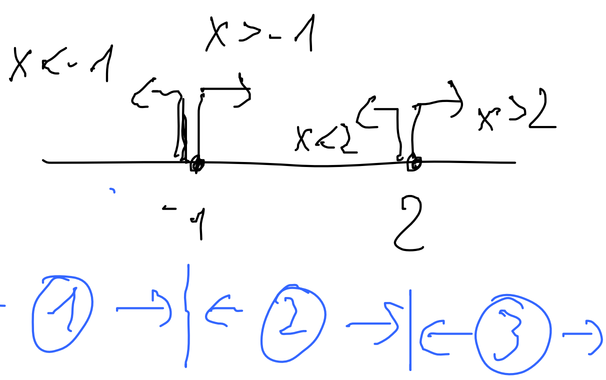
↯ Division durch Null

$$\Leftrightarrow 2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3$$

Bsp Betragsgleichung

$$|x+1| = 2\,|x-2|$$



Fall 1: $x < -1$

$$-(x+1) = -2(x-2) \quad | +2x, \ +1$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$ ↯ passt nicht zu $x < -1$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Fall ②: $x \geq -1 \wedge x \leq 2$

$$(x+1) = -2(x-2) \quad | +2x, -1$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

passt in Bereich ②

Fall ③: $x > 2$

$$x+1 = 2(x-2) \quad | -x, +4$$
$$5 = x$$

passt in Bereich ③

$$\Rightarrow \quad L = \{1, 5\}$$

Ü $\quad |x-1| - 3|x+3| = 1$

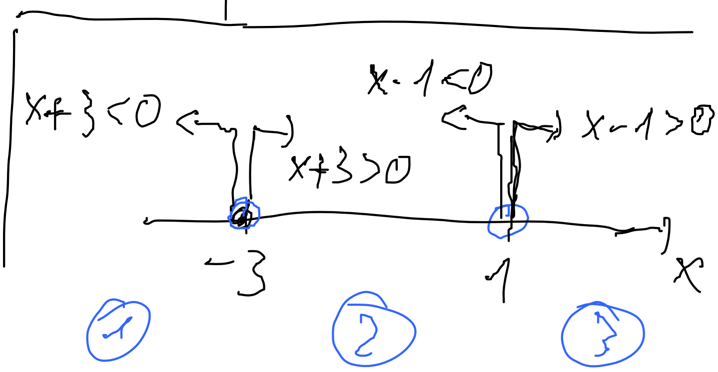
N.R.

$$|x-1| = \begin{cases} (x-1) & \text{f. } x>1 \\ -(x-1) & \text{f. } x \leq 1 \end{cases}$$

Fall ①: $x+3<0$

$$-(x-1) + 3(x+3) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} = -4{,}5 \quad \boxed{\checkmark}$$



Fall ②: $\underline{x+3 \geq 0 \;\wedge\; x-1 < 0}$

$-(x-1) - 3(x+3) = 1$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad x = -\frac{9}{4} = -2.25$

$\boxed{IV}$

Fall ③: ... keine Lösung

Faktorenzerlegung (Ausklammern)

a) $x^2 - 25 = 0$

3. Binomische Formel
$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-5)}_{A}\underbrace{(x+5)}_{B} = 0$

$\Leftrightarrow x-5=0 \;\vee\; x+5=0 \quad \Rightarrow \quad L = \{+5; -5\}$

$\Leftrightarrow x = 5 \;\vee\; x = -5$

---

b) $x \ln(x^2+1) + x^2 \ln(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + x^2) \ln(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x}_{a} \cdot \underbrace{(1+x)}_{b} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{c} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad 1 + x = 0 \quad \lor \quad \ln(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad x = -1 \quad \lor \quad x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad x = -1 \quad \lor \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \quad L = \{0, -1\}$$

Def. bereich

$D_T = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}^+$

c) $\overbrace{x \ln(x) + x^2 \ln(x^2)}^{T(x) =} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\ln(x) + x \ln(x^2)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\ln(x) + x \, 2 \ln(x)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (1 + 2x) \cdot \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad 1 + 2x = 0 \quad \lor \quad \ln(x) = 0$$

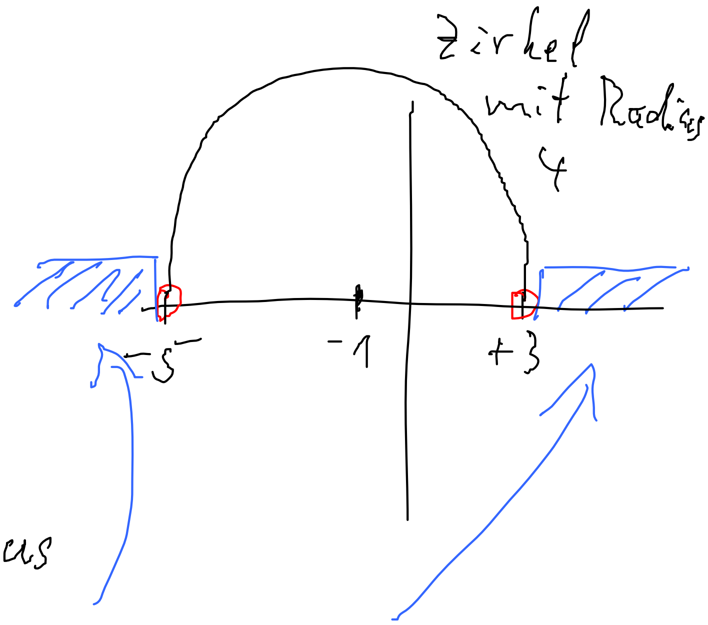
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \lor \quad x = -\frac{1}{2} \quad \lor \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

$$\Rightarrow \quad L = \{1\}$$

Betragsungleichung

$$|x+1| > 4$$

$$\Leftrightarrow |x-\underbrace{(-1)}_{\text{Zentrum}}| > \underbrace{4}_{\text{Radius}}$$



$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \lor x > 3\}$$

Summen

Satz S2-11 für $u = 2$, $o = 5$

$$\sum_{k=2}^{5} a = a + a + a + a = \underbrace{4}_{5-2+1} a$$

$$\sum_{k=2}^{500} a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{499 \text{ mal}} = 499a$$

Aufgabe: $A = \sum_{k=1}^{50} k^4 - \left(\sum_{k=4}^{54} (k-2)^4 \right) = ?$

Lösungsweg 1: Summen ausschreiben

$$A = 1^4 + 2^4 + \dots + 50^4$$

$$\underbrace{-2^4 - 3^4 - \dots}_{\text{heben sich weg}} - 51^4 - 52^4$$

$$= 1^4 \qquad - 51^4 - 52^4 \approx -14 \cdot 10^6$$

Lösungsweg 2: Indextransformation
(beide Summen auf k^4 bringen)

$$\sum_{k=1}^{50} k^4 - \sum_{k=4}^{54} \underbrace{(k-2)}_{j}{}^4$$

NR	$k-2=j$	
k	4	54
j	2	52

$$= \sum_{k=1}^{50} k^4 - \sum_{j=2}^{52} j^4$$

"Namen sind Schall und Rauch"
$j \to k$

$$= \sum_{k=1}^{50} k^4 - \sum_{k=2}^{52} k^4 = 1^4 - 51^4 - 52^4$$

Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=3}^{5} a \cdot 1 = a \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=3}^{5} 1$$

$$= a \sum_{i=1}^{10} (5-3+1) \cdot 1$$

$$= a\,(10-1+1) \cdot (5-3+1) = \underline{\underline{30\,a}}$$

Regel (*)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ki} + B_{ki}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} A_{ki}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} B_{ki}\right)}$$

A_{ki} ist Abkürzung für Term der von k und i abhängt

$$A_{ki} = \sin(k+2i)$$

oder $= k^4 + 3i$ oder ...

a_k = Term, der für jedes k anderen Wert annimmt

z.B. $= \sin(k^2)$

Regel nach Satz S2-12

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_k b_i = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Übung a): Hier ist $a_k = k$, $b_i = i$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{10} k\cdot i = \left(\sum_{k=1}^{2} k\right)\left(\sum_{i=1}^{10} i\right) = 3\cdot 55$$

$$= \underline{\underline{165}}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = \underbrace{1 + \underbrace{2 + \ldots + 99}_{101} + 100}_{101}$$

$$= 50\cdot 101 = 5050$$

(Trick von Gauss)

Übung b)

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\left((k\cdot i)^2+5\right) \overset{\text{Regel }(*)}{=} \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} \underset{a_k}{k^2}\,\underset{b_i}{i^2} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} 5$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} i^2\right) + (3-1+1)\cdot(4-1+1)\cdot 5$$

$$= 14 \cdot 30 + 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$= \underline{\underline{480}}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$= 1 + 4 + 9$$