

Mathe V 22.10.14

www.meinprof.de

Fakultät $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ $n \in \mathbb{N}$

$$0! = 1$$

Binomialkoeff. $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}}$

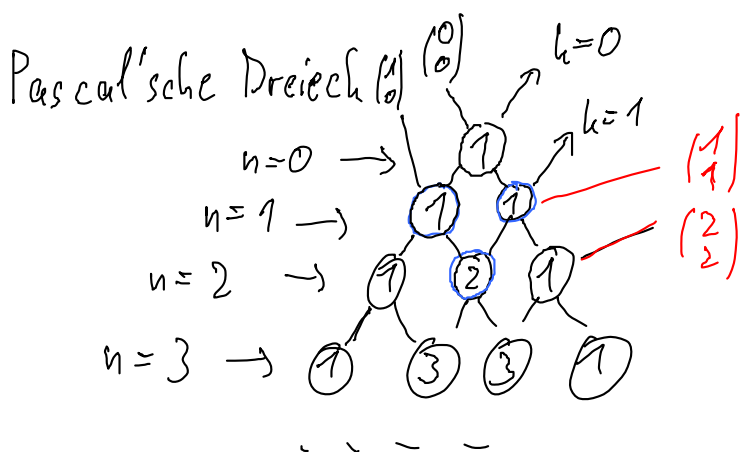
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k} \quad (\text{Symmetrie})$$

z.B. $\binom{100}{2} = \binom{100}{98} =$

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2! 98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98 \cdot \dots \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{98 \cdot \dots \cdot 1}} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$$

Beweis Additionstheorem

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1)!}{(k+1)! k! (n-k)!} \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{\cancel{k} n! + 1 \cdot n! + n! n - \cancel{k} n!}{(k+1)! (n-k)!} \\ &= \frac{(1+n) n!}{(k+1)! ((n+1) - (k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! ((n+1) - (k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \quad , \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$



$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 \stackrel{\text{Bin. Satz}}{=} \dots$$

s. Skript

Pascal'sches Dreieck: Jeder Knoten "in der Mitte"
 hat zwei Väter und sein Wert ist Summe Werte Väter

n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 6 4 1
n=5	1 5 10 10 5 1
n=6	1 6 15 20 15 6 1
n=7	1 7 21 35 35 21 7 1

↑ Werte für $\binom{7}{k}$ ↑

$$\begin{aligned}
 (a+b)^7 &= \binom{7}{0} a^0 b^7 + \binom{7}{1} a^1 b^6 + \dots + \binom{7}{7} a^7 b^0 \\
 &= 1a^0 b^7 + 7a^1 b^6 + 21a^2 b^5 + 35a^3 b^4 \\
 &\quad + 35a^4 b^3 + 21a^5 b^2 + 7a^6 b^1 + 1a^7 b^0
 \end{aligned}$$

Folgen

	$n=1$	$n=10$	$n=1000$
1. Bsp: $A_n = 100n + n^2$	101	1100	$\approx 100000 + 1 \cdot 10^6$
$B_n = 3n^2 - 5$	-2	295	$\approx 3 \cdot 10^6$

$\Rightarrow$ für große n ist $B_n > A_n$, also B langsamer

Beispiel folgen

1) $a_n = \frac{1}{n}$

$(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

streng monoton fallend $\downarrow$

n.o.b., z.B. $k=1$, $k=2$

n.u.b., z.B. $k=0$

2) $a_n = 2^n$

$(a_n) = 2, 4, 8, 16, \dots$

streng monoton steigend $\uparrow$

n.u.b., $k=2$

nicht n.o.b.

$a_n \rightarrow \infty$

3) $a_n = (-1)^n$

$(a_n) = -1, +1, -1, +1, \dots$

n.o.b., $k=1$

n.u.b., $k=-1$ oder -2

4) $a_n = 3$

$(a_n) = 3, 3, \dots$

konstante Folge $\uparrow \downarrow$

n.o.b., n.u.b.

5) $a_n = \frac{n}{2^n}$

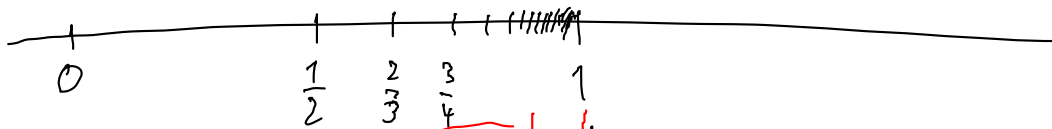
$(a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$

$\downarrow$, n.o.b., n.u.b.

$a_n \rightarrow 0$

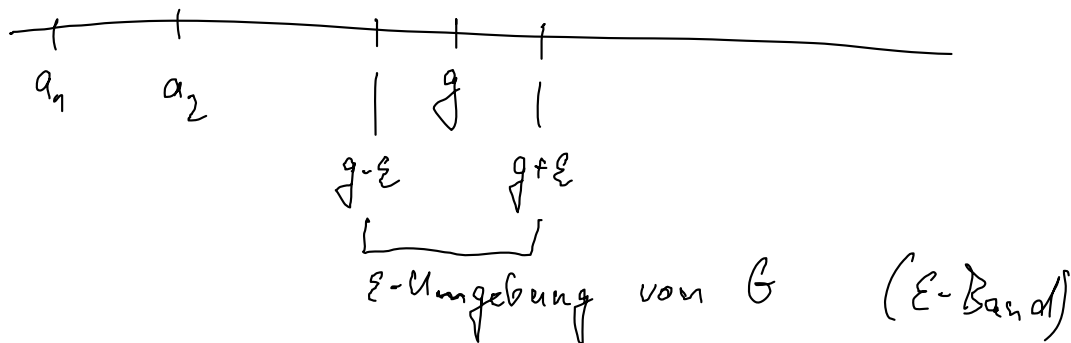
Grenzwert einer Folge

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad , \quad (a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots \frac{999}{1000}, \dots, \frac{9999}{10000}, \dots$$



alle Glieder ab $n=4$ liegen in diesem Intervall
alle Glieder " $n=n_0$ " " " " " " "

Allgemeiner



Satz 5.2-1: Eine konvergente Folge ist beschränkt

Denn: wenn konvergent, dann ab $n \geq n_0$ alle Folgenglieder in ϵ -Band, d.h. beschränkt durch $[G-\epsilon, G+\epsilon]$.

Vor n_0 liegen endlich viele Glieder, d.h. Max, Minimum existiert

Beispiele Grenzwert

1) $a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ "Nullfolge", d.h. Folge mit Grenzwert Null

Beweis: $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$ wäre Grenzwertbedingung

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

d.h. zu jedem ε existiert ein $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ so daß für alle $n > n_0$ gilt $|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$2) a_n = \frac{2n-1}{3n}$$

$$(a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{6}{9}, \dots$$

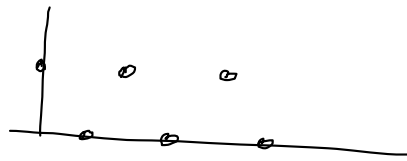
Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ (s. 1)

$$\text{denn: } a_n = \frac{2n-1}{3n} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$$

$$3) a_n = 1 - (-1)^n$$

$$(a_n) = 2, 0, 2, 0, 2, \dots$$

a_n ist divergent



Nicht jede divergente Folge ist unbeschränkt!

$$4) a_n = n^2 + 5$$

$$(a_n) = 6, 9, 14, \dots \quad \text{nicht u.o.b.}$$

Daher ist (a_n) nach 53-2 divergent

a_n "besitzt uneigentlichen Grenzwert" ∞

a_n ist bestimmt-divergent

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \end{array} \right.$$

Beispiele zu "0 · ∞"

$$a) \quad \begin{array}{ccc} \frac{1}{n} \cdot n^2 & = & n \rightarrow \infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \cdot \infty & & \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{ccc} \frac{1}{n^2} \cdot n & = & \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \cdot \infty & & \end{array}$$

d.h. es kann alles rauskommen

Beispiel 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7}$$

"g.P.i.N."
 $\left| \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{n^2}{n^2} + 4 \frac{n}{n^2} - 5 \frac{1}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$= \frac{-2 + 0 + 0}{8 - 0 + 0} = -\frac{1}{4}$$

Beispiel 2)

Wenn a_n konvergent gegen a , dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = a^r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 \stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{7 - 0}{3 + 0} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{49}{9}$$