Mathe V 29.10.2014

Beispiele Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (7n+3) = 7\cdot\infty + 3 = \infty$ bestimmt divergent

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-3-n) = 2\cdot\infty - 3 - \infty = ?$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (n-3) = \infty - 3 = \infty$

Nullfolgen

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}$ mit $|q|<1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+11-n) = 11$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7n^3+4}{3-n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7\frac{n^3}{n^2} + \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0} - \frac{n^2}{n^2}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n}{-1} = -\infty$ (bestimmt divergent)

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{11n+5}{3+n}\right)^{10} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{11n+5}{3+n}\right)^{10} \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{11+0}{0+1}\right)^{10} = \underline{\underline{11^{10}}}$

g.P.i.N.
(erweitern mit $\frac{1}{n}$)

Ü3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1}\right) \underset{\uparrow\ \cdot\left(\frac{n^{-1}}{n^{-1}}\right)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{1+\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{1-\frac{1}{n}}\right)$

$\cancel{= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{1+0} - \frac{n^2}{1-0}\right) = 0}$ // falsch!

$\cancel{= \lim\limits_{n\to\infty} (0) = 0}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{1+\frac{1}{n}}\right) - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{1-\frac{1}{n}}\right) = \infty - \infty = ?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3(n-1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^4}-n^3-\cancel{n^4}-n^3}{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n^3}{n^2-1}\right)\underset{\cdot\left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}}\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n}{1-\frac{1}{n^2}}\right)=-\infty$$

ii4) $$\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot10^{k}+6\cdot10^{2k}}{0.4\cdot10^{k-3}-20\cdot10^{2k-2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot10^{k}+6\cdot10^{2k}}{0.4\cdot10^{k-3}-20\cdot10^{-2}\cdot10^{2k}}\ \Bigg|\cdot\frac{10^{-2k}}{10^{-2k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{75\cdot\cancel{10^{k-2k}}+6\cdot10^{0}}{0.4\cdot\cancel{10^{k-2k-3}}-0.2\cdot10^{0}}$$

$$=\frac{6\cdot1}{-0.2\cdot1}=-30$$

$$\lim_{k\to\infty}10^{-k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{+k}=0\quad \text{wg}\ \lim_{k\to\infty}q^k=0,\ |q|<1$$

denn: $$\lim_{k\to\infty}10^{k-2k-3}=\lim_{k\to\infty}10^{-k}\cdot10^{-3}=0\cdot10^{-3}=0$$

Landausche O()-Notation

Beispiele

$a_n = 2n^3 - n^2 \in O(n^3)$

denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3} = \ldots = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$ also beschränkt

$a_n \in O(n^5)$, denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^5} = \ldots = \underline{\underline{0}}$ also beschränkt

<u>Anmerkung</u>: die Folge b_n (n^3 oder n^5 im obigen Bsp) wird i.d.R so gewählt, dass sie

a) möglichst einfach ist (also n^3 und nicht n^3+7n^2+33)

b) möglichst "billig" ist (also n^3 und nicht n^4 oder n^5)

Welche "einfachen" Folgen kommen in der Informatik oft vor?

$$O(1) < \underline{O(\ln(n)) < O(n)} < \underbrace{O(n\ln(n))}_{\text{z.B. Bubblesort}} < O(n^2) < O(n^2\ln(n))$$

$$< O(n^3) < \ldots < O(n^{1000}) < O(2^n)$$

Wieso $O(\ln(n)) < O(n)$?

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{-Situation}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} (n) = \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$ - Situation

L'Hospital: Zähler + Nenner getrennt ableiten

Übung Landau

	(a)	(b)
$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$	$2n^3 + O(n^2)$
$7n^5 + 26n^6$	$O(n^6)$	$26n^6 + O(n^5)$
$n + 3n^2 - 2n\log(n)$	$O(n^2)$	$3n^2 + O(n\log(n))$
$\frac{n^4+n^2}{n+5}$	$O(n^3)$ (*)	$n^3 + O(n^2)$ (**)

$$2n^3 - n^2 - 2n^3 = \underline{\underline{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+n^2}{n+5}\right) \underset{\cdot\left(\frac{n^{-1}}{n^{-1}}\right)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n}{1+\frac{5}{n}}\right)$$

(*) denn $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n^4+n^2}{n+5}\right)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2}{(n+5)\,n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2}{n^4+5n^3} = \frac{1+0}{1+0} = \underline{\underline{1}}$

also wird Folge $a_n = \frac{n^4+n^2}{n+5}$ durch $b_n = n^3$ <u>beschränkt</u>

(**)

$$\frac{n^4+n^2}{n+5} - n^3 = \frac{n^4+n^2-n^3(n+5)}{(n+5)} = \frac{\cancel{n^4}+n^2-\cancel{n^4}-5n^3}{n+5} = \frac{-5n^3+n^2}{n+5}$$

$$= \frac{-5n^2+n}{1+\frac{5}{n}} \in O(n^2)$$

Modulare Arithmetik

Anwendungsfälle

1) Kryptographie (Verschlüsselung) $\longrightarrow$ AI, Diskrete Mathe (3. Sem)
2) ISBN, IBAN oder andere Prüfziffern

$$15 \bmod 7 = 1$$ (weil $14 = 15-1$ glatt durch 7 teilbar ist)

Beispiele zum mod-Rechnen

1) $(25 \cdot 36) \bmod 7$

$= (4 \cdot 1) \bmod 7 = \underline{\underline{4}}$

N.R. $\underline{25} = 21 + \underline{4}$

$\underline{36} = 35 + \underline{1}$

glatt durch 7 teilbar

2) $(3 - 8) \bmod 7$

$= -5 \bmod 7 \underset{+7}{=} 2 \bmod 7 = \underline{\underline{2}}$

3) $81^{501} \bmod 8$

$= 1^{501} \bmod 8 = \underline{\underline{1}}$

NICHT erlaubt ist "Kürzen" (Dividieren durch gemeinsamen Faktor)

denn: $2 \cdot 4 \equiv 5 \cdot 4 \pmod 6$ weil $2 \cdot 4 = 8$ und $5 \cdot 4 = 20$ zur selben Restklasse $2 \pmod 6$ gehören

ABER $2 \equiv 5 \pmod 6$ (d.h. 4 gekürzt)
ist FALSCH

Bsp. $8 + p \equiv 2 \pmod{11}$ $\quad | +3$

$\Leftrightarrow 3 + 8 + p \equiv 3 + 2 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 0 + p \equiv 5 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow p \equiv 5 \pmod{11}$

Prüfziffer für ISBN 3-446-1987-p : Welches p?

Lösung: $10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p \equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 250 + p \equiv 0 \pmod{11}$ $\quad | -220 - 22$ (Vielfache von 11)

$\Leftrightarrow 250 - 220 - 22 + p \equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 8 + p \equiv 0 \pmod{11}$ $\quad | +3$

$\Leftrightarrow 11 + p \equiv 3 \pmod{11}$

$\underline{\underline{p = 3}}$

(wäre 10 herausgekommen würde in ISBN "X" stehen)

Richtige $\boxed{\text{ISBN 3-446-19873-3}}$