

Mathe - V 05.11.2014

Mat-Tutorium Do 15³⁰ - 17⁰⁰ R 2.108

Modulare Arithmetik

$$\begin{aligned} & (5063 \cdot 27 + 17) \bmod 5 \\ &= (3 \cdot 2 + 2) \bmod 5 \\ &= (8) \bmod 5 \\ &= \underline{\underline{3}} \bmod 5 \end{aligned}$$

Beim Modulo-Rechnen dürfen Zahlen in Summen oder Produkten sowie die Basis in Potenzen durch einfachere Vertreter ihrer Restklasse ersetzt werden

$$\begin{aligned} 5063 \bmod 5 &= 3 \bmod 5 = 3 \\ 88^{10} \bmod 8 &= 0^{10} \bmod 8 = 0 \end{aligned}$$

Beispiel Prüfziffer

ISBN Simon Singh "Geheime Botschaften"

3-446-19873-3

Lösung ü1

$$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 261 = 0 \pmod{11} \quad \Leftrightarrow 8 = 0 \pmod{11} \quad \checkmark$$

N.R. Was ist $261 \bmod 11$

$$(261 - 220 - 33) \bmod 11$$

$$(8) \bmod 11$$

Mit Taschenrechner $261 \div 11 = 23.7...$

$$261 - 23 \cdot 11 = \underline{\underline{8}} \quad \text{Rest}$$

$\Rightarrow$ Die ISBN mit Zehndreher "91" ist nicht gültig

Übung 2

wie oben = 261

$$10 \cdot x - \underline{10 \cdot 3} + 10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + \dots + 3 = 0 \quad (\bmod 11)$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x - 30 + 261 = 0 \quad (\bmod 11)$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x + 231 = 0 \quad (\bmod 11)$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x + 0 = 0 \quad (\bmod 11)$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot x = 0 \quad (\bmod 11)$$

x	10·x	10x mod 11	
0	0	0	✓
1	10	10	↓
2	20	9	↓
⋮	⋮	8	↓
9	90	2	↓

Tabelle

$\Rightarrow$ nur für $x=0$ scheinbar richtige ISBN

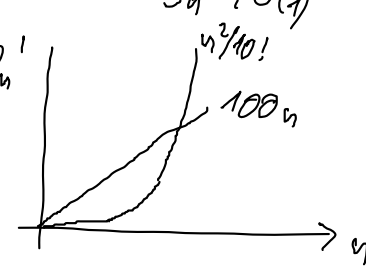
für alle anderen $x=1, \dots, 9$ wird Doppelfehler detektiert.

Landau'sche O-Notation

Übung Laufzeit

	Erster Algo	Zweiter Algo	$\frac{n(\text{Erster})}{\text{Zweiter}}$ im $\lim_{n \rightarrow \infty}$	
Fall 1	$n^2 + O(n)$	$3n^2 + O(1)$	$\frac{1}{3}$	denn $\frac{n^2 + O(n)}{3n^2 + O(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$
Fall 2	$\frac{n^2}{10!} + O(n)$	$\frac{3}{10!} n^2 + O(1)$	$\frac{1}{3}$	zu A_n'
Fall 3	$\frac{100n}{2} + O(1)$	$n + O(1)$	$\frac{50}{1}$	

g.P.i.N mit n^{-1} machen



N.R. $D_n = \frac{(n+1)! \cdot n}{(n-1)! (n+1)^2} + 1000 = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)!} \cdot n}{\cancel{(n-1)!} \cdot (n+1)^2} + 1000 = \frac{n^2}{n+1} + 1000$

$\frac{\cdot (\frac{1}{n})}{\cdot (\frac{1}{n})} \quad D_n = \frac{\cancel{n}}{\cancel{1} + \frac{1}{n}} + 1000$

Im Fall 1 ist A_n 3mal schneller
 " " 2 " A_n' " "
 " " 3 " D_n 50mal "

N.R. $(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$

Fazit zu Folgen

$\bar{u}$	konvergent	divergent
beschränkt	$e^{-n}, \frac{1}{n}$	$1+(-1)^n, (-1)^n$ $\sin(n)$
unbeschränkt		$n^2, -n^3$ $\tan(n), e^n$

bestimmt-divergent: läuft ^{eindeutig} gegen $+\infty$ oder $-\infty$

1) Jede bestimmt-div. Folge ist divergent WAFK

2) Jede div. F. ist best.-div.
FALSCH wg $(-1)^n$

3) FALSCH wg $(-1)^n$ o.ä.

Funktionen

Bsp: $g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 5 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist eine reelle Funktion von $D = \mathbb{R} \rightarrow Z = \mathbb{R}$

Übung $f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\sqrt{x+12}}{(x-1)(x+5)}$

①: Radikant nicht neg. $x \geq -10$

②: $x \geq -12$

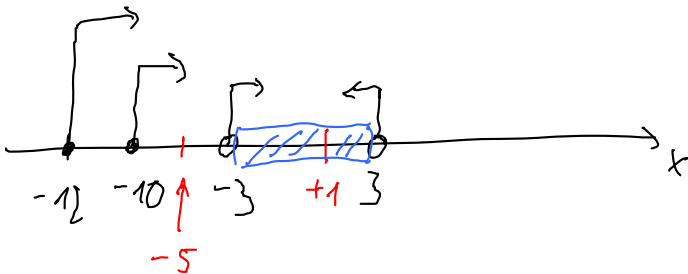
③: Radikant positiv: $9-x^2 > 0$

$\Leftrightarrow |x| < 3$



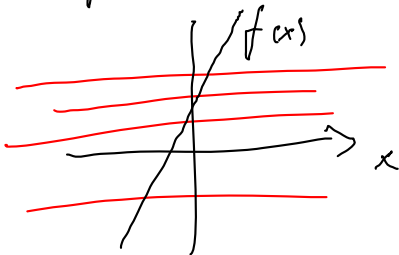
④: $x \neq 1, x \neq -5$

$D = (-3, 3) \setminus \{1\}$



Übung injektiv / surjektiv

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$ ist injektiv + surjektiv
= bijektiv



Haben alle $y = 2x+1$ genau ein x als Lsg.?

$\Leftrightarrow y-1 = 2x \quad |:2$

$\Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = x$

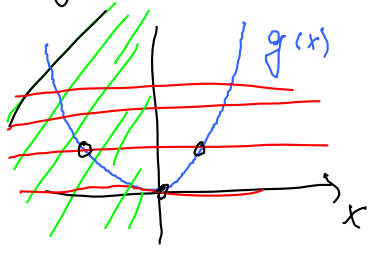
$\Rightarrow$ Ja es gibt genau ein $x = \frac{y-1}{2}$

mit $f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y \quad \checkmark$

$x = \boxed{u(y) = \frac{y-1}{2}}$ ist die Umkehrfunktion zu $f(x)$

$\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $g(x) = x^2$



jede Horizontale y trifft $g(x)$ mindestens einmal
 $\Rightarrow$ NICHT injektiv, aber surjektiv

$g: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $g(x) = x^2$ ist injektiv, surjektiv
 bijektiv