Mathe-V 12.11.2014

Mathe Tutorium Do ab 16^{00} (statt 15^{30})

Praktikum Ersatztermin (NUR für Bahnstreik-Betroffene)

Mi, 12.11.14 um 13^{30} (Anmeldung bei Dr. Lam)

Dozentenwechsel: nä 2 Wochen bei mir

dann übernimmt Dr. Schmitter

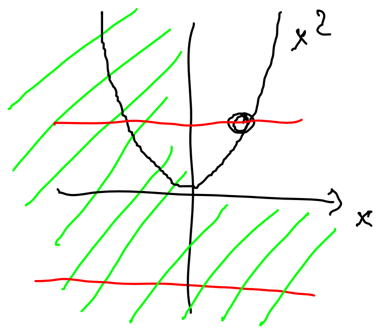
Umkehrfkt f^{-1}

Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ oder $f(f^{-1}(x)) = x$

z.B. $e^{\ln(x)} = x$ oder $\ln(e^x) = x$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$

ist nicht injektiv

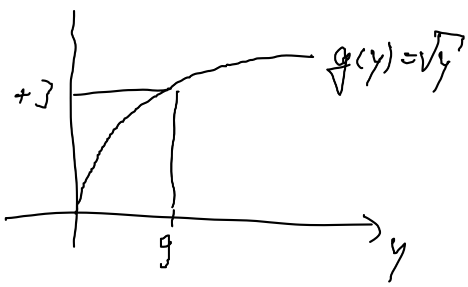


jedoch $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$

ist injektiv u. bijektiv

Dies ist umkehrbar $y = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

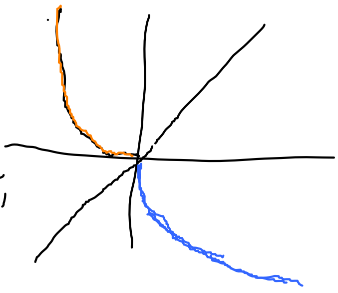
$f^{-1}(y) = g(y) = \sqrt{y} = x$



Umbenennen $y \to x$: $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$

Negativer Ast

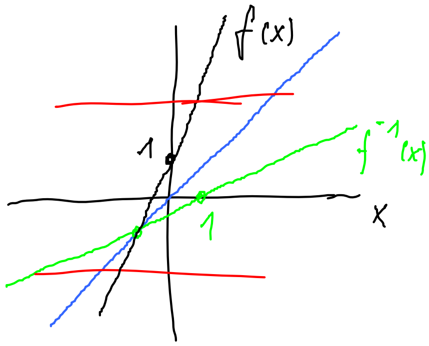
(wäre auch denkbar, ist aber nicht gewählt worden)



Übung Umkehrfkt zu $f(x) = 2x+1$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}$

$f(x)$ ist bijektiv, daher umkehrbar



$$y = 2x+1$$

$$y-1 = 2x$$

$$\frac{y-1}{2} = x = g(y) = f^{-1}(y) \qquad \text{Umbenennen } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Probe: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$ ✓

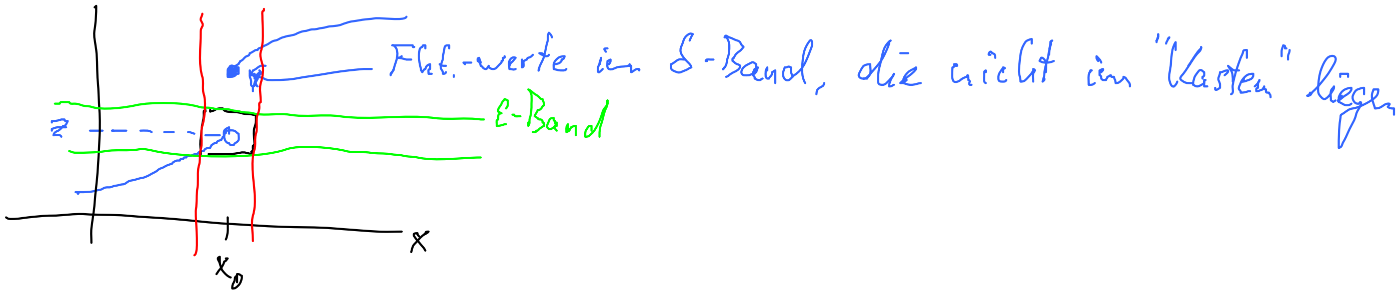
Grenzwerte von Funktionen

Einführendes Beispiel: Was macht $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \to 0$?

x	1.0	0.3	0.1	0.01
$\frac{\sin(x)}{x}$	0.841	0.995	0.998	0.99998

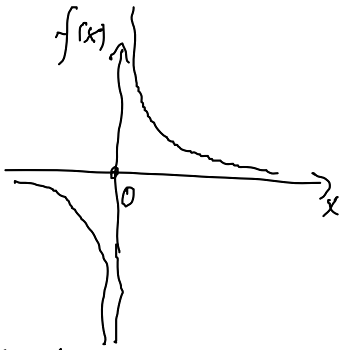
Wahrscheinlich ist $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Bsp für "kein Grenzwert bei x_0"



Weitere Beispiele:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$



hat keinen Grenzwert bei $x_0 = 0$

denn $x_n = \frac{1}{n}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = n = +\infty$, also divergent

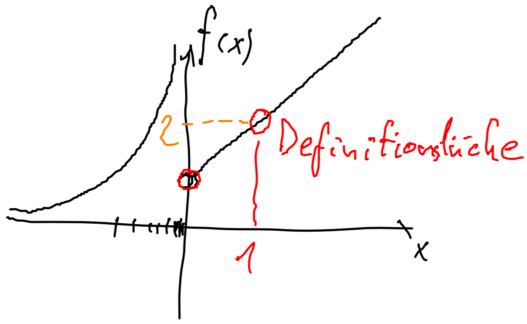
2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Anleihe aus Kap 5.4. (Taylorreihe)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$x=0$ Einsetzen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^5/5! + \dots}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots \overset{\downarrow}{=} \underline{\underline{1}}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, denn für $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{(-\infty)} = \underline{\underline{0}}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, " " " $+\infty$ " $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = +\infty$

g.P.i.N.

$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$ (Polstelle), denn für $x_n = -\frac{1}{n}$ gilt (s.o.)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, denn für $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $x_n > 0$ ist

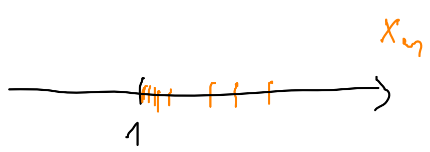
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{0-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ ist <u>nicht</u> definiert

Binomi

$\lim_{x\to 1-} f(x) = 2$, denn für $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} \overset{\downarrow}{=}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x_n-1)}(x_n+1)}{\cancel{x_n-1}} = \underline{\underline{\lim_{n\to\infty}(x_n+1)}} = \underline{\underline{2}}$$



Übung

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x+1)\cos(x-1) + \dfrac{\sin(x-1)}{x+1} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right]$

Zu a) "1" einsetzen führt auf $(1+1)\cos(0) + \dfrac{\sin(0)}{1+1} = 2 \cdot 1 + \dfrac{0}{2}$

$= \underline{\underline{2}}$

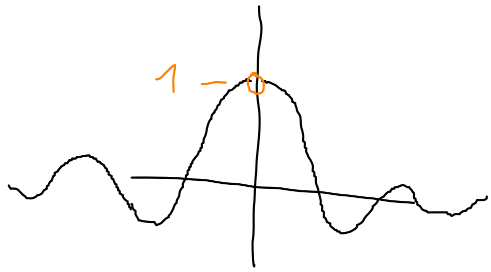
zu b) "1" einsetzen geht nicht, also umformen

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{(x+2)}{(x-1)} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right] = \lim_{x \to 1} \left[\frac{\cancel{x^2}+2x+x+2-(\cancel{x^2}+2x+3)}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

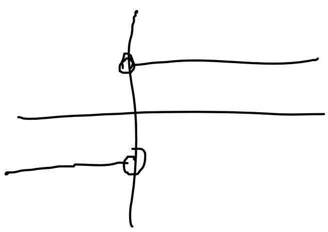
Stetigkeit

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$ hat bei $x = 0$ hebbare Unstetigkeit

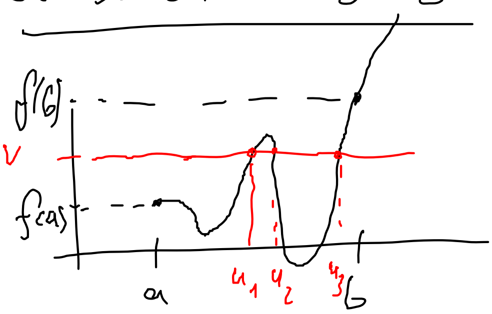


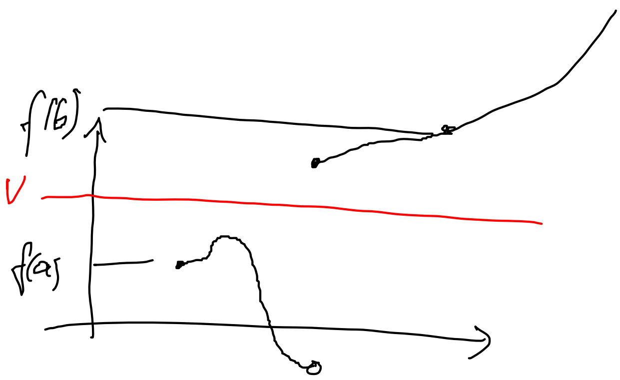
Mit Definition $f(0) = 1$ entsteht stetige Fkt auf $\mathbb{R}$

b) Sprungstelle



Zwischenwertsatz

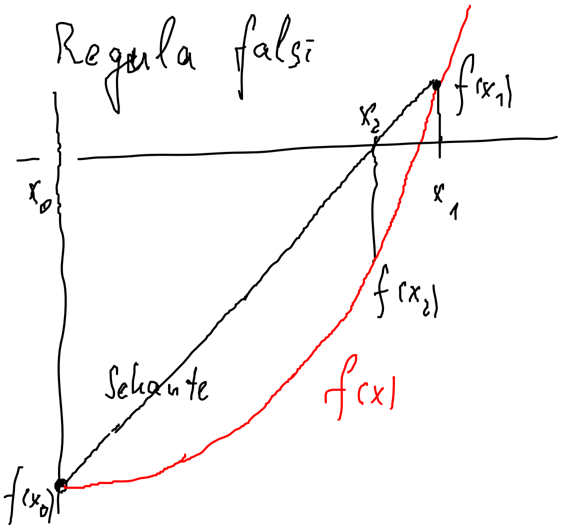




f stetig

f unstetig

Regula falsi



Strahlensatz $\dfrac{x_1 - x_2}{\underset{\substack{\shortparallel \\ f(x_2)}}{f(x_1) - 0}} = \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \qquad (1)$$

Regula falsi

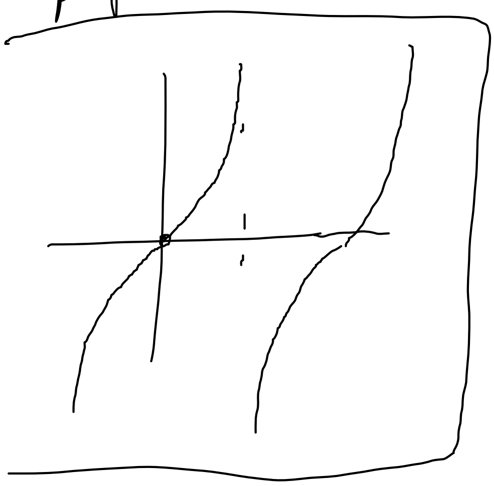
1) Berechne $f(x_2)$ für x_2 nach Gl. (1)

2) Wenn $|f(x_2)| < \delta$ fertig

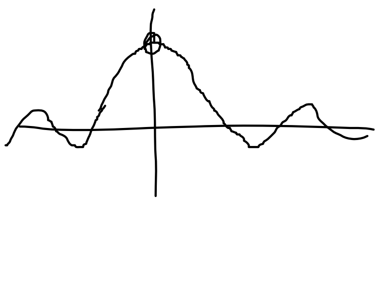
3) Wenn $f(x_2) \cdot f(x_0) > 0$, ersetze x_0 durch x_2

4) " $f(x_2) \cdot f(x_1) > 0$, ersetze x_1 durch x_2

Bsp für Fkt mit Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, aber nicht stetig



z.B. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ bei $x_0 = 0$



denn $f(x_0)$ ist nicht definiert