

MA 1 Vorlesung 19.11.2014

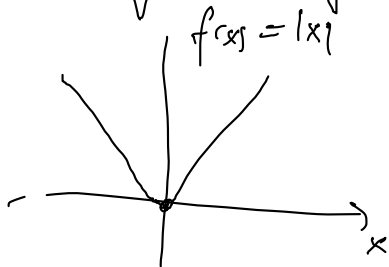
24.-28.11. Profil²-Woche $\Rightarrow$ keine Mathe-V
-Ü
-Tut

Definition Steigung einer Funktion $f(x)$ in x_0 (= Ableitung)

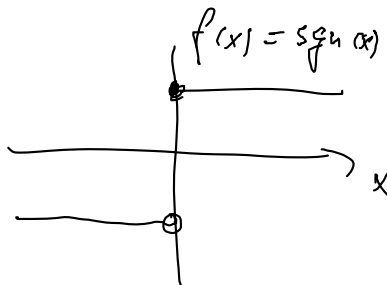
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x = x_0+h}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Differentialquotient

Ableitung = Steigung. Nicht immer definiert



Steigung bei $x=0$
nicht definiert



Steigung bei $x=0$
nicht definiert

Regel

$$f(x) = x^a \quad (x > 0, a \in \mathbb{R})$$

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

Bsp Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{N.R. } u &= x^2 \\ u' &= 2x \\ v &= x+1 \\ v' &= 1+0 = 1 \end{aligned}$$

Bsp Kettenregel

$$h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^2$$

$$= g(f(x))$$

$$h'(x) = (g(f(x)))' = g'(u)|_{u=f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= 2u|_{u=f(x)} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

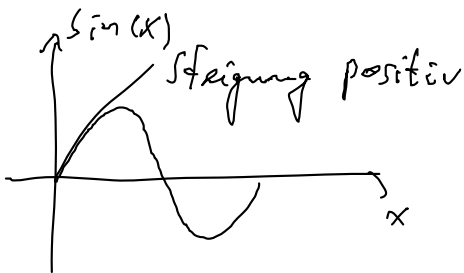
äußere Funktion
innere Funktion

$$g(u) = u^2, g'(u) = 2u$$

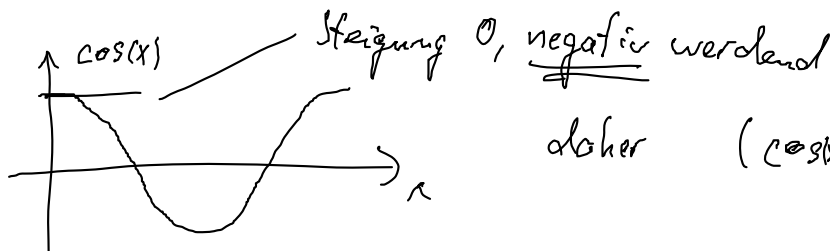
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Zu $\sin, \cos$ - Ableitung



$$\text{daher } (\sin(x))' = \cos(x)$$



$$\text{daher } (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$

Ü a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 3x^2 - 2(x+1) \cdot x^3}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

N.R.

$$u = x^3, u' = 3x^2$$

$$v = (x+1)^2$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

$$v' = 2x + 2 \text{ (Bin.)}$$

$$= 2 \cdot (x+1)$$

↑ Kettenregel

$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

b) $g(x) = \sin(x^3)$

Kettenregel: $u = \sin(v)$ äußere Fkt.
 $u' = \cos(v)$
 $v = x^3$ innere Fkt.
 $v' = 3x^2$

$$g'(x) = \underbrace{\cos(x^3)}_{u'(v)|_{v=x^3}} \cdot \underbrace{3x^2}_{v'(x)}$$

$$c) h(x) = \exp(\sin(x^2))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{äußere Fkt } u = \exp(v) \Rightarrow u' = \exp(v) \\ \text{innere Fkt } v = \sin(x^2) \\ v' = \cos(x^2) \cdot 2x \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{h'(x) = \exp(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}}$$

$$d) f(x) = e^{ax}$$

$$\text{äußere Fkt } u = e^v \quad u' = e^v$$

$$v = ax \quad v' = a$$

$$f'(x) = a e^{ax}$$

Tipps zum Ableiten

1) Wenn bei Quotientenregel die Nenner fkt eine Potenz ist, z.B. $v(x) = (x+1)^2$ oder $v(x) = (2x+1)^4$, dann kann man immer einen Term $((x+1)$ bzw. $(2x+1))$ kürzen, bevor man ausmultipliziert

2) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ableiten: NICHT über Quotientenregel, sondern

$$f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

3) Analog bei $f(x) = \frac{1}{(x+1)} = (x+1)^{-1}$

$$f'(x) = -(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Taylorpolynom

Forderungen

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$(P_n(x_0))' = f'(x_0) \Leftrightarrow a_1 = f'(x_0)$$

$$(P_n(x_0))'' = f''(x_0) \Leftrightarrow 2a_2 = f''(x_0) \Leftrightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$(P_n(x_0))^{(n)} = f^{(n)}(x_0) \Leftrightarrow n! a_n = f^{(n)}(x_0) \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

lauter
Zahlen
für konkretes x_0

Beispiel zu Taylor $f(x) = \ln(x)$ für $x_0 = 1$ in Taylorpolynom der Ordnung $n=3$ überführen $P_3(x)$ und den Fehler für $x=1.5$ nach Restgliedformel abschätzen

Tabelle machen bis zur $(n+1)$ Ableitung

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) \text{ f. } x_0=1$
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$+2x^{-3}$	+2
4	$-6x^{-4}$	////

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \end{aligned}$$

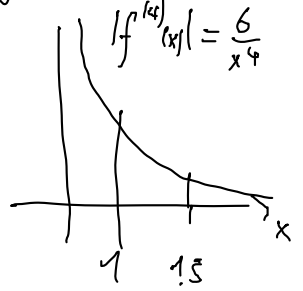
$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2!} (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3$$

$$P_3(1.5) = \frac{10}{24} = 0.41\bar{6}$$

Restglied: $|f^{(4)}(x)|$ im Intervall $[x_0, x] = [1, 1.5]$ anschauen:
 $|f^{(4)}(x)| = \frac{6}{x^4}$ ist in $[1, 1.5]$ monoton fallend

$\Rightarrow$ Eine obere Schranke $|f^{(4)}(1)| = 6 = C$ (am linken Rand des Intervalls)



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Restglied } & \frac{C}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \\ &= \frac{6}{4!} |1.5-1|^4 = 0.0156 \end{aligned}$$

Probe mit Taschenrechner $|\ln(1.5) - 0.41\bar{6}| = 0.01120 < 0.0156 \quad \checkmark$

(ii) $f(x) = \sin(x)$ in Taylorpolynom Grad 5 für $x_0 = 0$ entwickeln + Restgliedfehler für $x = 0.3$ bestimmen

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
5	$\cos x$	1
6	$-\sin x$	1

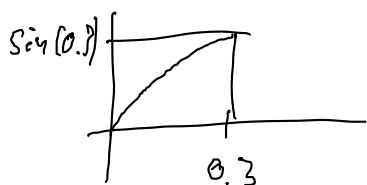
$$\begin{aligned} P_5(x) &= \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

Restglied: $|f^{(6)}(x)| = |\sin(x)|$

Einfache Abschätzung $C_1 = 1$ ist eine obere Schranke



Genauere Abschätzung: $C_2 = \sin(0.3)$ weil



$|\sin(x)|$ in $[0, 0.3]$ monoton steigend

$$\text{Restglied mit } C_1 : \frac{1}{6!} \cdot (0.3-0)^6 \approx 1 \cdot 10^{-6}$$

Restglied mit C_2 : $\frac{\sin(B_2)}{C_2} 0.3^6 \approx 2.9 \cdot 10^{-7}$