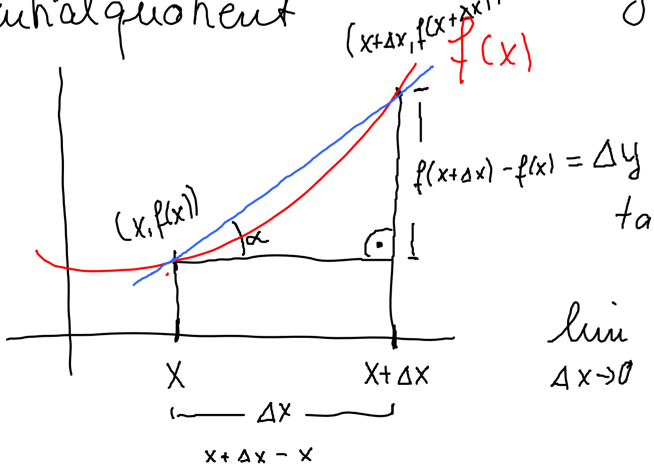
Mathematik 3.12.2014

Restl. Themen der Differentialrechnung

$y = f(x)$

Wdh. Differentialquotient



$\Delta x > 0$

$$\tan\alpha = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

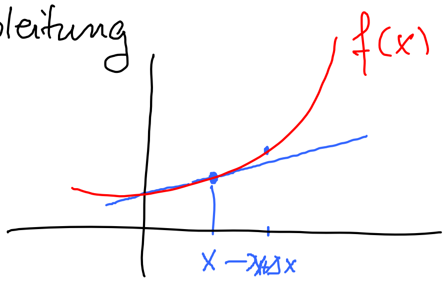
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Wdh. Ableitungsregeln

- Summenregel → für $f(x) + g(x)$
- Produktregel → für $f(x) \cdot g(x)$
- Quotientenregel → für $\frac{f(x)}{g(x)}$
- Kettenregel → für zusammengesetzte Funktionen $y = f(g(x))$

Bedeutung der 1. Ableitung



$f(x+\Delta) > f(x)$ positive Steigung

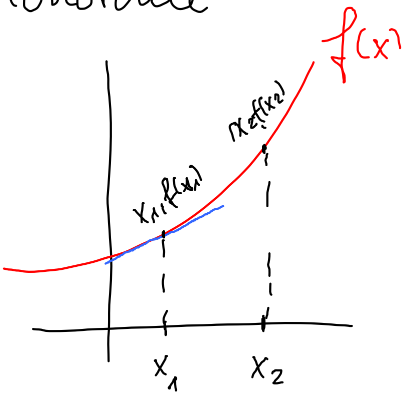
Steigung ist ein Maß für die Änderung der Funktionswerte

Bedeutung der 2. Ableitung

Maß für die Änderung der Steigungswerte : Krümmung

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen – char. Kurvenpunkte

Monotonie

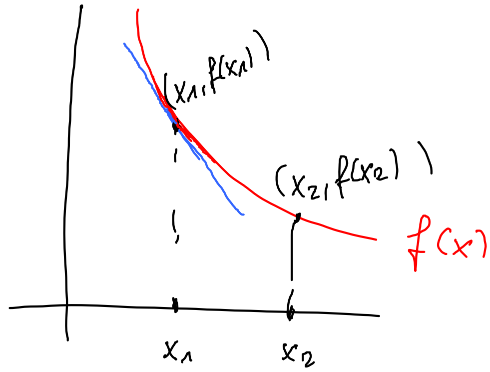


$x_2 > x_1$

$f(x_2) > f(x_1)$

streng monoton wachsend

$f'(x_1) > 0$



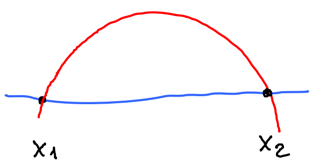
$x_2 > x_1$

$f(x_2) < f(x_1)$

streng monoton fallend

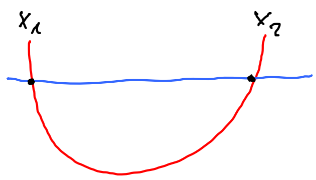
$f'(x_1) < 0$

Krümmungsverhalten



Konkav

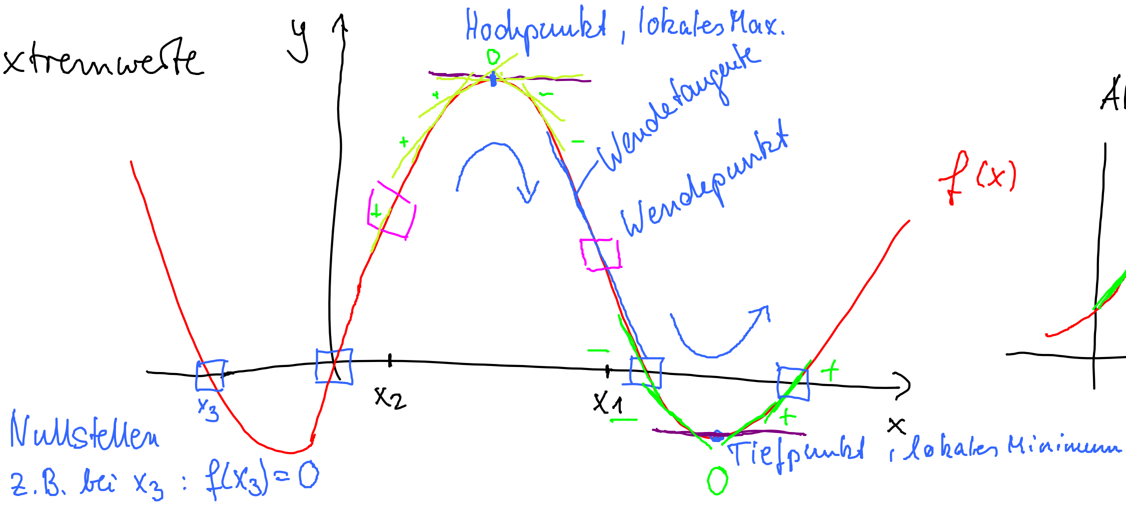
$f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [x_1, x_2]$



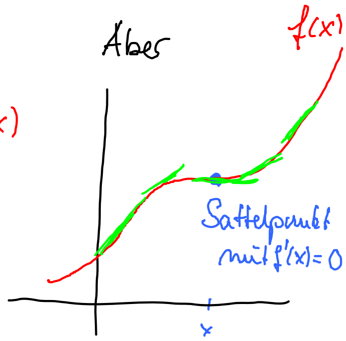
Konvex

$f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [x_1, x_2]$

Extremwerte



Aber



Notwendige Bed. für Extremwert in x_0 : $f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bed. für Extremwert in x_0 : Max : $f''(x_0) < 0$

Min : $f''(x_0) > 0$

Hinreichende Bed. für Wendepunkt in x_1, x_2 : $f''(x_1) = 0$ $f'''(x_1) \neq 0$

$f''(x_2) = 0$ $f'''(x_2) \neq 0$

Wendetangente : Bestimmung der Gleichung

Bp: WP bei (5, 10)

$f'(5) = 2$ $\qquad y = mx + b$

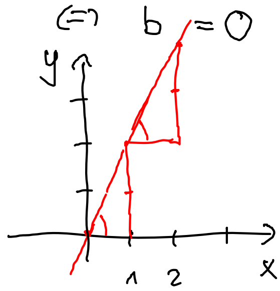
$y = 2x + b$

PP m. WP $\quad 10 = 2 \cdot 5 + b$

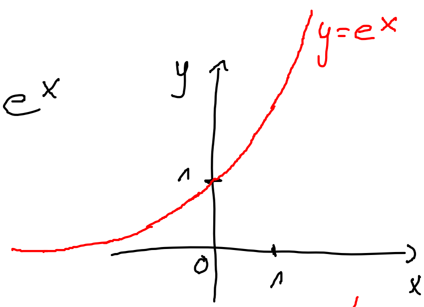
$\Leftrightarrow 10 = 10 + b$

$\Leftrightarrow b = 0$

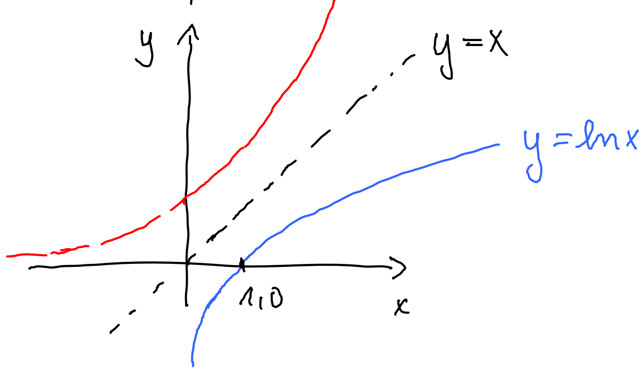
$y = 2x$



Bp: NST $\qquad f(x) = e^x$



keine NST



Fkt. u. Umkehrfkt. „entstehen" durch Spiegelung an der 1. WH

NST bei (1, 0)

1. Bp. für eine Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2}$$

gebrochen rationale Fkt.

1) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

2) Symmetrien : keine, da weder $f(x) = f(-x)$ noch $f(-x) = -f(x)$

3) Nullstellen $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$N_1(-2|0) \qquad N_2\left(\frac{2}{3}|0\right)$

4) Asymptoten (Näherungsverhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 + \overbrace{\frac{4}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{0}}{1}$$

$$= 3$$

also : $y = f(x) = 3$ ist Asymptote

5) Pole (Singularitäten) : Verhalten der Funktion an den Def.lücken

hier : $x = 0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{3x^2+4x-4}{x^2} = -\infty$$

Pol ohne VZW

6) Berechnen von $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

$f = \frac{u}{v}$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(6x+4)\cdot x^2 - (3x^2+4x-4)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-4x^2+8x}{x^4} = \frac{-4x+8}{x^3} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

$$f''(x) = \frac{8x-24}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-24x+96}{x^5}$$

7) Extremwerte $f'(x) = 0 \iff -4x+8 = 0 \iff 4x = 8 \iff x = 2$

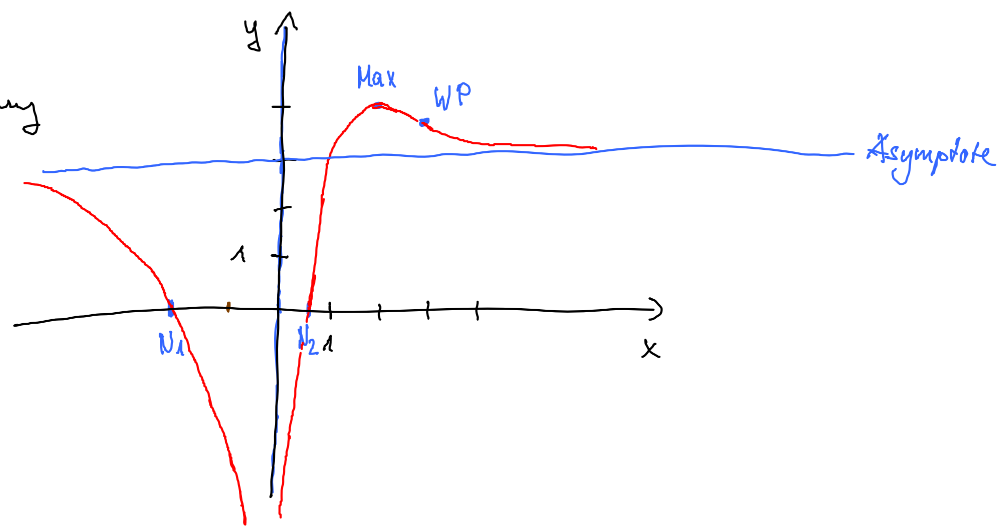
Kandidat bei $x = 2$: $f''(2) = \frac{8\cdot 2 - 24}{2^4} = -\frac{1}{2} < 0$ Also: Max bei $(2|4)$

8) Wendepunkte $f''(x) = 0 \iff 8x - 24 = 0 \iff x = 3$

$f'''(3) \neq 0$

Also: WP bei $(3|3{,}88)$

9) Zeichnung



2. Beispiel $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2}$

1) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

NR $9 - x^2 \geq 0$

$9 \geq x^2$

$x^2 \leq 9 \qquad -3 \leq x \leq 3$

$\mathbb{W} \rightarrow$ später

2) Symmetrien : keine

3) Nullstellen : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2} = 0 \quad \Big| - \sqrt{9-x^2}$

$\frac{1}{2}x = -\sqrt{9-x^2} \quad |\ (\ )^2$

$\frac{1}{4}x^2 = 9 - x^2 \quad | + x^2$

$\frac{5}{4}x^2 = 9 \quad | : \frac{5}{4}$

$x^2 = 9 \cdot \frac{4}{5}$

$x^2 = \frac{36}{5}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{36}{5}} = \pm 6\sqrt{\frac{1}{5}}$

Überprüfen der Lösungen : $x_2 = -6\sqrt{\frac{1}{5}}$ ist Lös.

NST bei $\left(-6\sqrt{\frac{1}{5}} \,\middle|\, 0\right)$

4) Asymptoten : keine

5) Pole : keine

6) Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \boxed{\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}}$

NR: Abl. v. $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

$= (9-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$g'(x) = \frac{1}{2}\left[(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right]$

$= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

Quotientenregel i.V.m. Kettenregel

$f''(x) = -\frac{9}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}$

$f'''(x)$ nicht notwendig, da kein WP (s. $f''(x)$)

7) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow 4x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{5}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{5}}$

Überprüfen liefert $x_1 = \sqrt{\frac{9}{5}}$ ist Kandidat

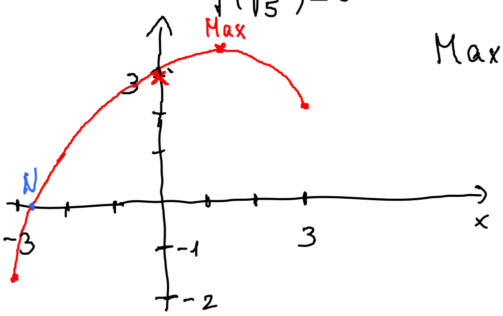
x_2 nicht

$f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) < 0$

Max bei $\left(\sqrt{\frac{9}{5}}, 3{,}354\right)$

8) WP keine

9) Zeichnung



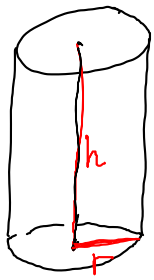
Extremwertaufgaben

Klassiker : Dosenprobleme

Es werden Blechdosen mit $V = 1\,l$ hergestellt

Frage : Welche Abmessungen für geringsten Materialverbrauch ?

Wichtig : Skizze



Zylinder
$$V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000\,cm^3$$

NB : $\pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$

Zielfkt: Ob : $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

hierfür muss das Min. berechnet werden

Unbekannte sind r und h

h wird ersetzt durch Umformung der NB

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

$$Ob(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2 \cdot \frac{1000}{r} = \underbrace{2\pi r^2}_{} + \underbrace{\frac{2000}{r}}_{2000 \cdot r^{-1}}$$

$$Ob'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$Ob''(r) = 4\pi + 4000 \cdot r^{-3}$$

$$O'(b) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2000$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{500}{\pi}$$
$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}419\,cm$$

$O''(5{,}419) > 0 \Rightarrow$ MIN

mit $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ ist $h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2} = \frac{40}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2}}} \approx 10.83\,cm$

Abmessungen Dose : $r = 5{,}419\,cm$ $\quad h = 10.83\,cm$