

Mathematik 10.12.2014

Lineare Algebra

1) Vektorrechnung

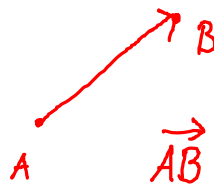
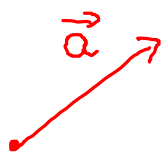
Skalar : Größen, die durch eine Maßzahl gekennzeichnet sind : z.B. 5 kg

kommt noch eine Richtungsangabe dazu, dann:
Vektor

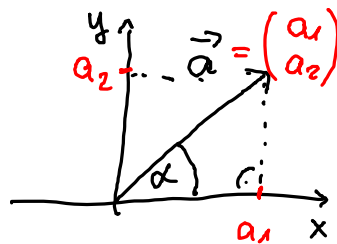
Def. (Vektor)

Größe mit Maßzahl und Richtung

Darstellung



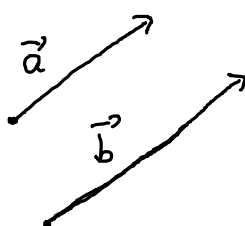
Vektor zum "Messen" in ein Koordinatensystem:



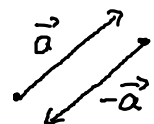
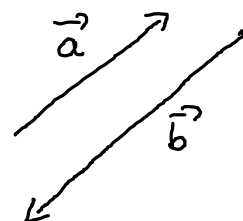
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Länge des Vektors

Parallele Vektoren:



Antiparallele Vektoren:



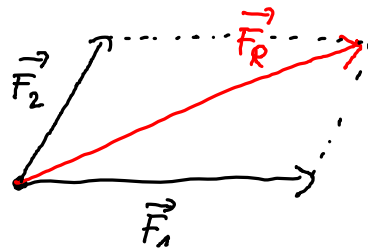
Nullvektor: $\vec{0}$ Einheitsvektor: $\vec{e}$ $|\vec{e}| = 1$

inverse Vektoren

Vektoroperationen

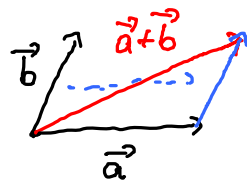
1) Addition von Vektoren

Aus der Physik

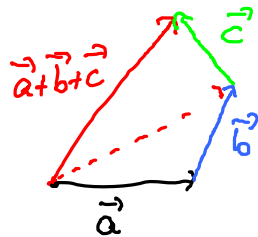


"Kräfteparallelogramm"

Def: Addition von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

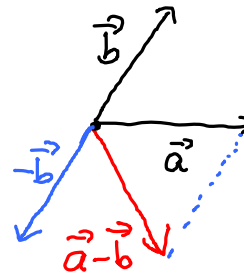


Summe von mehr als zwei Vektoren, z.B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$



Vektorpolygon

Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b}$



Summen- und Differenzvektor sind die Diagonalen des "Vektorparallelogramms"

- Multiplikation mit einem Skalar α

Bp: $2 \cdot \vec{a}$



"doppelt so lang"

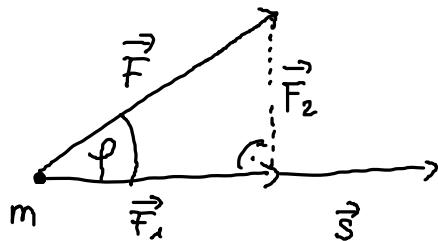
"Strecken, Stauchen, Richtungswechsel"

$\alpha > 1$

$\alpha < 1$

$\alpha < 0$

- Skalarprodukt



$$\angle \vec{F}, \vec{S} = \varphi$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$W = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}|$$

Arbeit Kraft · Weg

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

$$W = |\vec{S}| |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

Def: Skalarprodukt von Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren

$$\angle \vec{a}, \vec{b} = \varphi \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

heißt das Skalarprodukt

Schreibweise $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Achtung: Das Ergebnis ist ein Skalar, d.h. eine Zahl
kein Vektor

Eigenschaften: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativ

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ Distributivgesetz}$$

Frage: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Frage für zu Hause: Warum ist $\vec{a} \cdot (\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{\text{Skalar } c_1}) \neq (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\text{Skalar } c_2}) \cdot \vec{c}$?

$$\vec{a} \cdot c_1 \neq c_2 \cdot \vec{c}$$

Bsp: Von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kennt man:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 25$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Frage: $\varphi = \angle \vec{a}, \vec{b} = ?$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{15}{4 \cdot 5}$$

$$\cos \varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi = 41.4^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi_1$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow 16 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = 4$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 25 \Rightarrow |\vec{b}| = 5$$

Vektorprodukt

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren

$\angle \vec{a}, \vec{b} = \varphi$

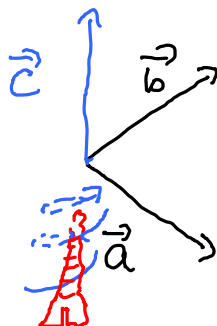
$$0 < \varphi < \pi$$

Def: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

(2) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

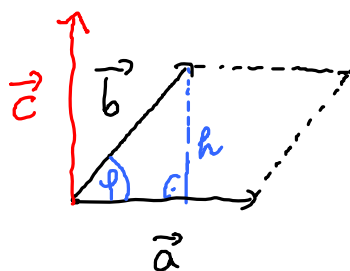


Vektorprodukt

= Kreuzprodukt

" $\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$ "

Geometrische Deutung:



$$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin \varphi \Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

Flächeninhalt Parallelogramm: $|\vec{a}| \cdot h$

$$\Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{c}|$$

Eigenschaften: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$$2) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

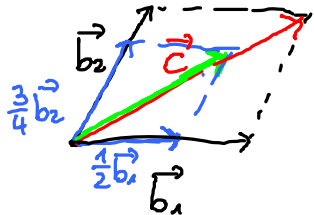
3) kein neutrales Element bzgl. Vektorprodukts

$$4) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$UA: |\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{Gesucht: } \nexists \vec{a}, \vec{b}$$

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

Def: Linearkombination



$$\vec{c} = 1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{c}' = \boxed{\frac{1}{2}} \vec{b}_1 + \boxed{\frac{3}{4}} \vec{b}_2$$

Linearkombination

Lineare Abhängigkeit — Lineare Unabhängigkeit

$$\vec{a} \quad 1 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

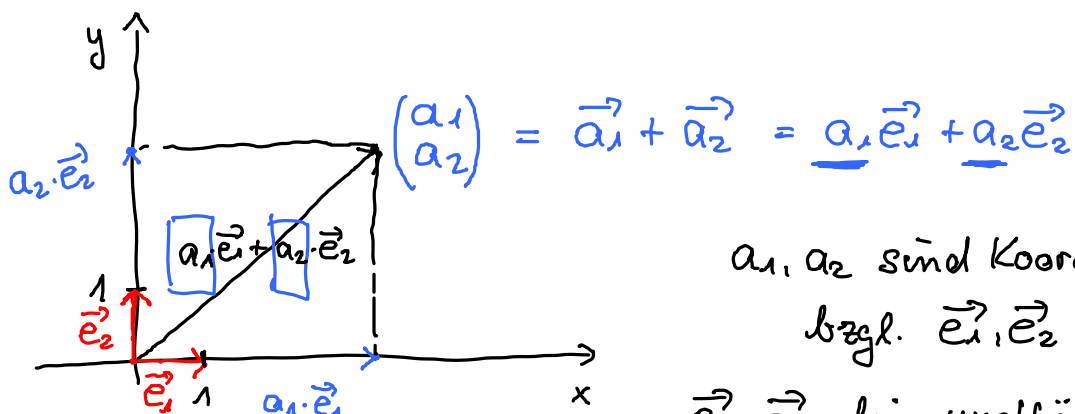
$$\vec{a}, \vec{b} \text{ lin. unabh.} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \quad \vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$$

$$\text{nur so m\u00f6gl.: } \boxed{0} \cdot \vec{a} + \boxed{0} \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

$$\boxed{1} \cdot \vec{a} - \boxed{\frac{1}{2}} \vec{b} = \vec{0}$$

Def:



$$|\vec{e}_2| = 1$$

$$|\vec{e}_1| = 1$$

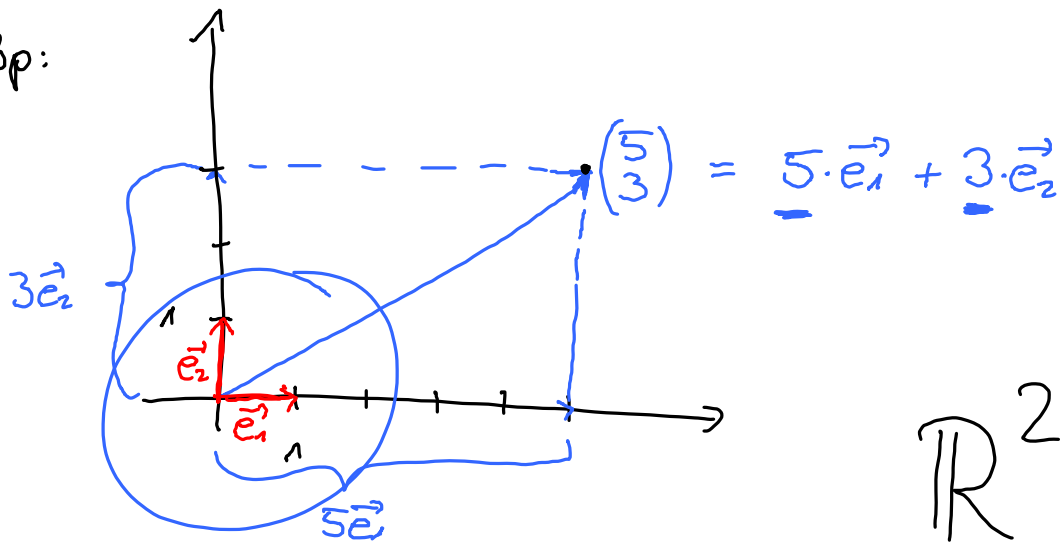
a_1, a_2 sind Koordinaten
bzgl. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ lin. unabhängig

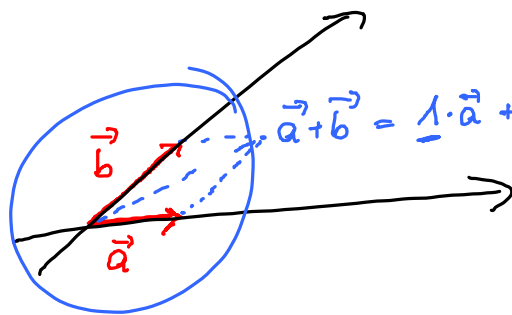
$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (Ebene)

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{1} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{0} \cdot \vec{e}_2 & &= \boxed{0} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{1} \cdot \vec{e}_2\end{aligned}$$

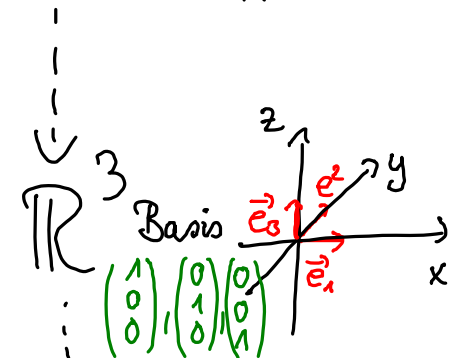
Bp:



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2$ Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



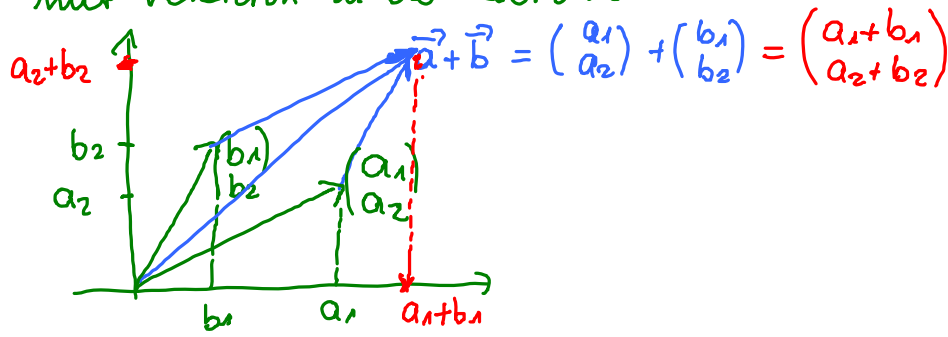
$\mathbb{R}^n$ Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Def: n -dimensionaler Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ n-Tupel}$$

n Koordinaten

Rechnen mit Vektoren in der Koordinatenschreibweise: n Einheitsvektoren



$$\text{Sei } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation m. einem Skalar

Summenvektor
im n -dim. Raum

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Länge eines n -dimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$|\vec{e}_i| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1^2} + 0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

Skalarprodukt in Koord. Schreibweise $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{B: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 3 + 16 + 27 + 0 = 46 \in \mathbb{R}$$

Normierter Vektor

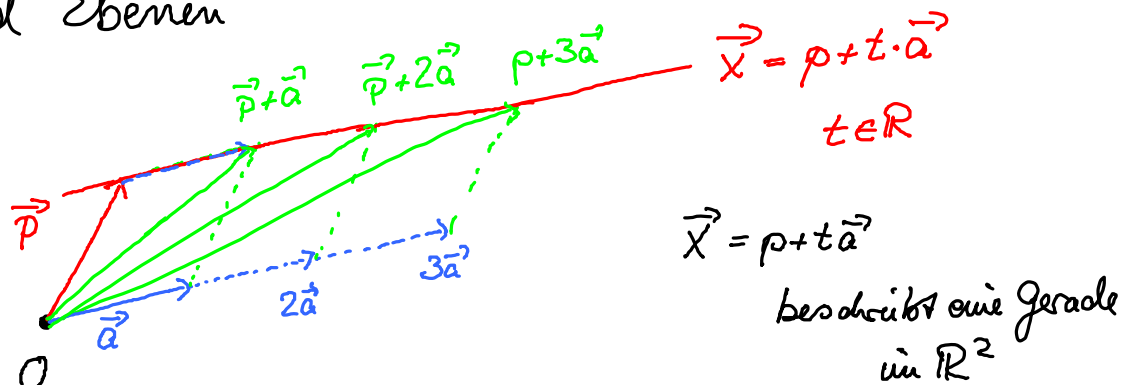
Norm von $a \in \mathbb{R}^n$: $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$
(Länge)

$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ hat die Norm 1

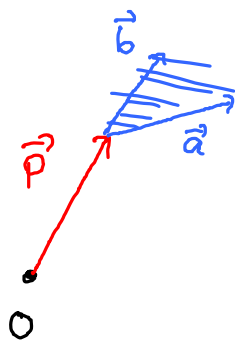
Orthogonale Vektoren

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Geraden und Ebenen



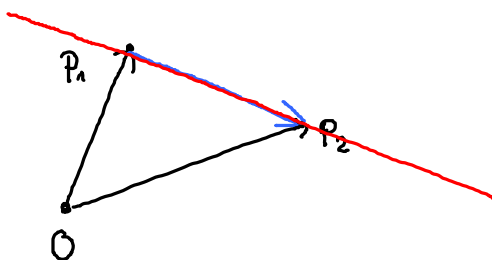
Punkt-Richtungsform
mit Ortsvektor $\vec{p}$
und Richtungsvektor $\vec{a}$



$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Punkt-Richtungsform einer Ebene

Bp:



Ortsvektor : $\vec{OP_1}$

Richtungsvektor : $\vec{OP_2} - \vec{OP_1}$

$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda (\vec{OP_2} - \vec{OP_1})$$

Zwei-Punkte-Form der Geraden

Bp: Gegeben: $P_1 = (2, 0, 4)$ $P_2 = (2, 2, 2)$

Liegt $Q = (2, -2, 6)$ auf der Geraden durch P_1 und P_2 ?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von Q : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Auswerten: $2 = 2 + 0 \quad \checkmark$

$$-2 = 0 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

$$6 = 4 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

Also Q liegt auf der Geraden