

Mathematik 17.12.2014

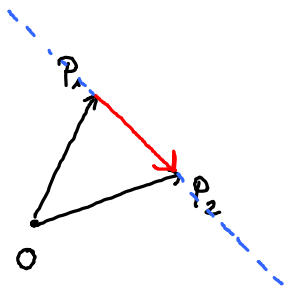
Erste Vorlesung im neuen Jahr:

Mittwoch, 7. Januar 2015

Wdh: Punkt-Richtungs-Form einer Geraden: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

einer Ebene: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

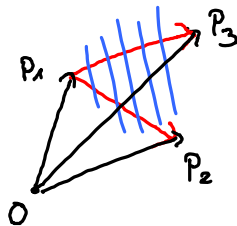
Bp:



$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda (\vec{OP_2} - \vec{OP_1}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Zwei-Punkte-Form

Entsprechend: Drei-Punkte-Form der Ebene



$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda (\vec{OP_2} - \vec{OP_1}) + \mu (\vec{OP_3} - \vec{OP_1})$$

Koordinatenform der Ebenengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \downarrow$$
$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu b_1 \\ \mu b_2 \\ \mu b_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1$$

$$x_2 = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2$$

$$x_3 = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

λ, μ eliminieren und mit Hilfe von x_1, x_2, x_3 ausdrücken

$$\text{Bp: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{I } x_1 = 1 + 5\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_1 - 1 - 5\lambda$$

$$\text{II } x_2 = 2 + 6\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_2 - 2 - 6\lambda$$

$$\text{III } x_3 = 3 + 7\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_3 - 3 - 7\lambda$$

$$\text{I} = \text{II}: x_1 - 1 - 5\lambda = x_2 - 2 - 6\lambda \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda = x_2 - x_1 - 1 \quad *$$

$$* \text{ in III: } 9\mu = x_3 - 3 - 7x_2 + 7x_1 + 7 \Rightarrow \mu = \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$$

λ und μ in I, II oder III:

$$\text{in I: } x_1 = 1 + 5(x_2 - x_1 - 1) + 9 \cdot \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0}$$

Koordinatenform der Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Überlegungen über den Verlauf von Geraden im Raum:

$$\text{Bp: } g_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

nicht parallel, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. unabhängig

Schnittpunktberechnung: $g_1 = g_2$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 3 + \lambda = 4 - 6\mu \Rightarrow \lambda = -6\mu + 1$$

$$\text{II } 2 + 2\lambda = -\mu \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\mu - 1$$

$$\text{III } 1 - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \quad *$$

$$* \text{ in I: } 6\mu = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{6}$$

$$* \text{ in II: } \mu = -2 \quad \text{↯}$$

Die Geraden sind also windschief

Zur Erinnerung: Vektorprodukt

$$\vec{a} \perp \vec{n} \quad \text{und} \quad \vec{b} \perp \vec{n}$$

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \quad (\text{Skalarprodukt})$$

$$n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0$$

↓

⋮

↓

$$n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(Hinweis: Berechnung auch über Determinante ($\rightarrow$ später) möglich)

Somit kann man den Normalenvektor einer Ebene bestimmen (steht senkrecht auf Ebene)

Damit gibt es eine weitere Darstellung einer Ebene:

Hesse Normalform

$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \quad |\vec{N}| = 1$$

$$\text{Sei } \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}(P_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0$$

heißt die Hesse-Normalform der Ebene

Matrizentechnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

k -ten Spalte

i -te Zeile

A besteht aus m Zeilen und n Spalten

A ist eine $(m \times n)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 & \boxed{12} & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \end{pmatrix} \quad a_{44} = 12$$

(5 x 6)-Matrix

Bp: Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Matrix: $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Dimension von A: 5×1

$$\vec{x} = (5 \ 7 \ 9 \ 3 \ 4)$$

$$A = (5 \ 7 \ 9 \ 3 \ 4)$$

Dimension von A:

$$1 \times 5$$

Frage: Wie viele Zeilen hat eine (28×3) -Matrix?
28 Zeilen

Rechnen mit Matrizen

1) Vergleich von Matrizen: Ordnungsrelation

A, B seien $(m \times n)$ -Matrizen

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$A \stackrel{\leq}{\geq} B \Leftrightarrow a_{ij} \stackrel{\leq}{\geq} b_{ij}$$

2) Matrix A heißt positiv $\Leftrightarrow a_{ij} > 0$

3) Nullmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

1) Quadratische Matrix

$$m = n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

m Zeilen
 m Spalten

Hauptdiagonale: $a_{ii} \quad i = 1, \dots, m$

2) Diagonalmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

3) Einheitsmatrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bp: $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

4) Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(m x n)-M.

$\Rightarrow$
"Spiegelung
an der
Hauptdiagonalen"

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aus Zeilen werden Spalten
Aus Spalten werden Zeilen

Es gilt $(A')' = A$

Sei A Diagonalmatrix, dann $A' = A$

5) Symmetrische Matrizen

A symmetrisch $\Leftrightarrow A' = A$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 20 \\ 3 & 1 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

A ist symmetrisch

A schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A' = -A$

6) Dreiecksmatrizen:

Quadratische Matrizen, deren Koeffizienten oberhalb bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen alle gleich Null sind

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hinweis auf den Begriff: Untermatrix

Matrixoperationen

Addition: nur Matrizen gleicher Dimension

Entsprechende Koeffizienten werden addiert/subtrahiert: $a_{ij} \pm b_{ij}$

- $A, B (m \times n)$ -Matrizen:
- $A+B = B+A$
 - $(A+B)+C = A+(B+C)$
 - $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
 - $A+O = A$
 $\uparrow$
Nullmatrix
 - Zu A ex. $-A$ mit $A+(-A)=O$
 - $(A \pm B)' = A' \pm B'$

Multiplikation von Matrizen

Bp:

	P1	P2		Preise / Stück
				P1 P2
Jan	5	3		(50 90)
Feb	9	7		
März	4	11		

3×2 1×2

Die monatlichen Erlöse errechnen sich wie folgt:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Januar:} & 5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 & = \begin{pmatrix} 520 \end{pmatrix} \\
 \text{Februar:} & 9 \cdot 50 + 7 \cdot 90 & = \begin{pmatrix} 1080 \end{pmatrix} \\
 \text{März:} & 4 \cdot 50 + 11 \cdot 90 & = \begin{pmatrix} 1190 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Diagram showing matrix multiplication dimensions: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} (3 \times 2)$ multiplied by $\begin{pmatrix} 50 & 90 \end{pmatrix} (2 \times 1)$ results in $\begin{pmatrix} 520 \end{pmatrix} (3 \times 1)$.

Weitere Betrachtungen:

Zur Produktion werden Einzelteile E_1, E_2, E_3 benötigt

	E1	E2	E3
P1	4	2	1
P2	0	5	3

Frage: Wieviele Einzelteile werden pro Monat benötigt?

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{array} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} P1 \\ P2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} & = & \begin{array}{l} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{array} \begin{pmatrix} 20 & 25 & 14 \\ 36 & 53 & 30 \\ 16 & 63 & 37 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

3×2 2×3 3×3

3×3

C_{22}

2. Zeile x 2. Spalte

Unterschiede zur Multiplikation in $\mathbb{R}$:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A \cdot E = A \quad E \cdot A = A$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$A^2 = A$ gilt auch, falls $A \neq E$ oder $A \neq O$ (manchmal $\rightarrow$ später)

Die Inverse einer Matrix A

A ist quadratisch : B heißt invers zu A $\Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = E$

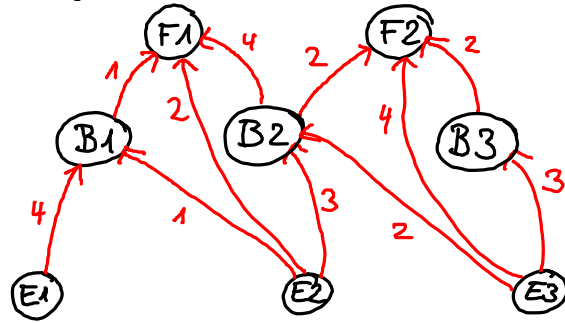
$$B = A^{-1}$$

mehr im neuen Jahr

Ökonomische Anwendung von Matrix

1) Das Eingangsbeispiel : Produktionszahlen auswerten etc.

2)



Gozintograph

"the part that 'goes into'"

	E1	E2	E3	B1	B2	B3	F1	F2
E1	0	0	0	4	0	0	0	0
E2	0	0	0	1	3	0	2	0
E3	0	0	0	0	2	3	0	4
B1	0	0	0	0	0	0	1	0
B2	0	0	0	0	0	0	4	2
B3	0	0	0	0	0	0	0	2
F1	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0	0	0

Teilebedarfsmatrix : (aus Gozintographen)

	F1	F2
F1	1	0
F2	0	1
B1	1	0
B2	4	2
B3	0	2
E1	4	0
E2	15	6
E3	8	14



Frohes Fest
und einen
guten Ruck!