Mathematik 7. 1. 2015

Ich wünsche allen ein gesundes, erfolgreiches neues Jahr!

Mündliche Wiederholung aller bisher besprochenen Kapitel der LA

Rang einer Matrix A

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten einer Matrix heißt der Rang der Matrix A

Schreibweise $rg(A)$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \times Z.1 \\ -4 \times Z.1 \end{matrix}$$

2. Zeile ist das Doppelte von Zeile 1
3. Zeile ist das Vierfache von Zeile 1

$\Rightarrow rg(A) = 1$

Wie kommt man dazu?

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Zeile $\neq 0$ bleibt übrig, daher $rg(A) = 1$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot -3.5$$

durch elementare äquivalente Umformungen

z.B.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{33} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

Treppenstufenform

$$\begin{pmatrix} 7 & -10.5 & 3.5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 1.\text{Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10.5 & 3.5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 9.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot 4.75$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10.5 & 3.5 \\ 0 & 9.5 & 23.75 \\ 0 & 9.5 & 0.5 \end{pmatrix} - 2.\text{Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10.5 & 3.5 \\ 0 & 9.5 & 23.75 \\ 0 & 0 & -23.25 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Lineare Gleichungssysteme

Def: Lineare Gleichung

Die Unbekannten kommen nur in der 1. Potenz und nicht miteinander multipliziert (nur durch + bzw. − verbunden) vor.

Bp: Historische Aufgabe

Unbekannten: x, y, z (jeweils die "Besitzschaft" der drei Reisenden)

1. Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 73 + x + y = 2[(x+z) + (y+z)] \\ \text{II} \quad & 73 + x + z = 3[(y+z) + (x+y)] \\ \text{III} \quad & 73 + y + z = 4[(x+y) + (x+z)] \end{aligned}$$

$$\text{I}: \quad 73 + x + y = 2x + 2z + 2y + 2z \quad | -x -y$$

$$73 = x + y + 4z$$

$$\text{II} \quad 73 + x + z = 3y + 3z + 3x + 3y \quad | -x - z$$

$$73 = 2x + 6y + 2z$$

$$\text{III} \quad 73 + y + z = 4x + 4y + 4x + 4z \quad | -y - z$$

$$73 = 8x + 3y + 3z$$

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= 73 \\ 2x + 6y + 2z &= 73 \\ 8x + 3y + 3z &= 73 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 3 \times 1$

Zum Start in den Gauß'schen Lösungsalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array}\right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

Lösungen linearer Gleichungen

1 Gleichung 1 Unbekannte $\Rightarrow$ 1 Lösung

Bp: $10x = 20 \mid :10$

$\Leftrightarrow x = \frac{20}{10} = 2$

1 Gleichung 2 Unbekannte $\Rightarrow \infty$ viele Lösungen

Bp.: $4x + 2y = 10$

$\Leftrightarrow y = -2x + 5$

Die ∞ vielen Lösungen liegen auf einer Geraden

1 Gleichung 3 Unbekannte $\Rightarrow \infty$ viele Lösungen

Bp: $4x + 2y + z = 20$

Die ∞ vielen Lösungen liegen auf einer Ebene

Bp:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
I	−1	−2	1	3	1
II	1	0	1	2	3
III	3	2	4	−1	1
IV	−2	6	−2	−2	16

$\cdot(-1)$ I'

Ziel: Treppenstufenform durch äquivalente Umformungen!

Auswahl einer Zeile: Pivotzeile
Auswahl einer Spalte: Pivotspalte

1	2	−1	−3	−1
1	0	1	2	3
3	2	4	−1	1
−2	6	−2	−2	16

− 1. Zeile
− 3 × 1. Zeile
+ 2 × 1. Zeile

1	2	−1	−3	−1
0	−2	2	5	4
0	−4	7	8	4
0	10	−4	−8	14

$\cdot(-\frac{1}{2})$

Erw. Koeffizientenmatrix nach der 1. Elimination

1	2	−1	−3	−1
0	1	−1	$-\frac{5}{2}$	−2
0	−4	7	8	4
0	10	−4	−8	14

+ 4 × 2. Zeile
− 10 × 2. Zeile

1	2	−1	−3	−1
0	1	−1	$-\frac{5}{2}$	−2
0	0	3	−2	−4
0	0	6	17	34

− 2 × 3. Zeile

	x_1	x_2	x_3	x_4	
I	1	2	−1	−3	−1
II	0	1	−1	$-\frac{5}{2}$	−2
III	0	0	3	−2	−4
IV	0	0	0	21	42

Aus IV $\quad 21\,x_4 = 42 \Rightarrow x_4 = 2$ *)

* in III $\quad 3x_3 - 2 \cdot 2 = -4 \Rightarrow 3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ **)

* und ** in II: $\quad x_2 - 0 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -2 \Rightarrow x_2 = 3$ ***)

* und ** und *** in I: $\quad x_1 + 2 \cdot 3 - 0 - 3 \cdot 2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

Die Lösungen des GS lauten: $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

Lösbarkeit von linearen GS, lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit von Gleichungen

Ein lin. GS heißt linear unabhängig und besitzt eine eindeutige Lösung
mit m Gleichungen und m Unbekannten $\Leftrightarrow$ $\boxed{rg(A) = rg(A,b) = m}$

Es darf nicht vertauscht werden z.B. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ sondern $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Zusammenfassung: Lösbarkeit eines GS mit m Gleichungen und n Variablen

Fall: $m < n$

Das GS ist unterbestimmt
Es besitzt unendlich viele Lösungen
Linear abhängige Gleichungen können eliminiert werden

Fall: $m = n$

Das GS ist bestimmt
Sind alle Gleichungen linear unabhängig, so ex. eine eindeutige Lösung
Falls linear abhängige Gleichungen eliminiert werden können,
so ist das Restsystem unterbestimmt und es ex. ∞ viele Lösungen

Fall: $m > n$

Das GS ist überbestimmt
Mindestens $m-n$ Gleichungen sind lin. abhängig, dann ex. eine eindeutige
Lösung, falls genau $m-n$ abhängig und die restl. unabh. sind.

Lineare GS und Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Lösung $\downarrow$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

NB: $x_1\ x_2 \dots x_n$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b_1^* \\ & 1 & & b_2^* \\ 0 & & 1 & b_n^* \end{array}\right)$$

$x_1 = b_1^*$
$x_2 = b_2^*$
$\vdots$
$x_n = b_n^*$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

Vereinfacht formuliert: Simultanes Lösen: Überführen der Matrix A in E durch erlaubte Umformungen, die gleichzeitig an der Einheitsmatrix durchgeführt werden, macht aus

E dann A^{-1}

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht A^{-1}

A

E

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

:2

$-2\times 1.\text{Zeile}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-2\times 2.\text{Zeile}$

$+3.2\text{Zeile}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$-3.\text{Zeile}$

$\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E

A^{-1}