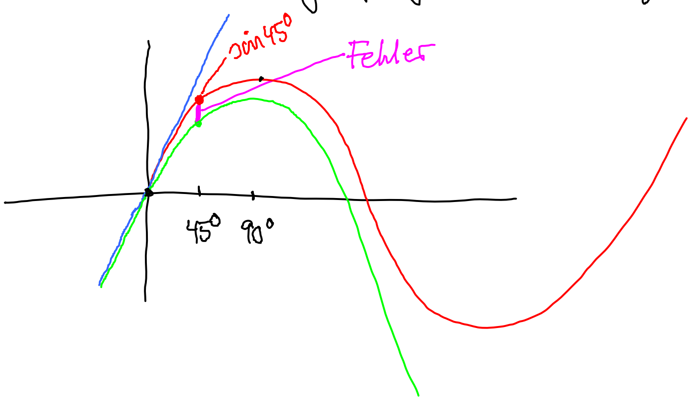
Vorlesung Mathematik
14. 1. 2015

Bemerkungen zum Taylorpolynom und zur Restgliedabschätzung

$$T_{\underset{n+1}{n}}(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

Taylorpolynom n-ten Grades



Probeklausur

$f(x) = e^x$

$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \frac{1}{n!}x^n$

Um e zu berechnen

$T_n(1)$

da $e^1 = e$ $e<3$

$$R_6(1) = \left|\frac{f^{(7)}(1)}{7!}1^7\right| < \frac{3}{7!}$$

Wdh. Inverse einer Matrix – Schema

$$\begin{array}{ccc} A & & E \\ \Big\downarrow \text{Umformung in endl. Schritten} & & \Big\downarrow \text{simultanes Anwenden dieser Umformungen auf } E \\ E & & A^{-1} \end{array}$$

Determinanten

"Kennzahl" für quadratische Matrizen

Bp: Berechnung der Inversen einer 2x2 Matrix $\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

z.B. $a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} x_{21} = 1$

$\vdots$

Es erscheint im weiteren Lösungsweg immer

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante einer 3x3 - Matrix

$$\begin{array}{ccccc} + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Regel von Sarrus

Nebenbem.: Permutation = Anordnungsmöglichkeit

bei 2 Objekten:

1 2
2 1

2 Möglichkeiten $= 1 \cdot 2 = 2!$

bei 3 Objekten

1 2 3
3 1 2
1 3 2
2 1 3
3 2 1
2 3 1

$2 \cdot 3$ Möglichkeiten $= 1 \cdot 2 \cdot 3$

$= 3!$

Die Determinante einer Matrix m-ter Ordnung

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des zweiten Index

$I(j)$: Zahl der Inversionen des zweiten Index (Umstellungen)

Eigenschaften

1) Vertauscht man zwei benachbarte Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen

(Hinweis: Inversionen in Formel)

2) Bei Vertauschen von beliebig vielen Zeilen, ändert sich ggf. das Vorzeichen

$$\det A_{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Zeilen}}}{P(i)}} = (-1)^{I(i)} \cdot \det A$$

3) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$

Hinweis: $A^* = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$

$\det A^* = \lambda \det A$

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{**} = \lambda^m \det A$$

Fazit:

Determinanten können umgeformt werden, das Vielfache einer Zeile kann zu einer anderen Zeile addiert werden, Achtung nur bei Vertauschen von (benachbarten) Zeilen und die Auswirkung auf das Vorzeichen!

Sind Zeilen linear abhängig, so ist die Determinante gleich Null!

Es gilt: $\det A = \det A'$

Die Transponierte von A

Einfachere Berechnung einer Determinante

1) Adjunkte und adjungierte Matrix

Def: Die Unterdeterminante $(m-1)$-ter Ordnung zum Element a_{ij}, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht, wird als
MINOR $|A|_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & - & - & - & a_{im} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = |A|_{ij}$$

Bp: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ besitzt folgende Minoren (9 Stück)

$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$|A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$|A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \qquad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5$

$|A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$

Def: Adjunkte einer Determinante

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Die Adjunkte zum Element a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|A|_{ij}$$

Achtung: das ist eine reelle Zahl!

Fasst man sämtliche Adjunkten zu einer Matrix zusammen, und nimmt davon die Transponierte, dann erhält man die Adjungierte zur Matrix A

man schreibt: A_{ad}

Das wird nun verwendet, um höherreihige Determinanten zu reduzieren, um die Berechnung zu erleichtern!

Der Entwicklungssatz von Laplace

(Herabsetzen der Ordnung der Determinante)

det A mit Ordnung m

Entwicklung nach der Zeile i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

Entwicklung nach der Spalte j:

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ det A gesucht

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$

Entwicklung nach der 2. Spalte

$$\det A = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 \cdot 2 + 6 = 12$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-1 \cdot 1) \quad - \quad (-1 \cdot 1)$$

$$-1 \quad + 1 \quad = 0$$

$$\det A = 0$$

Falls nicht sehr viele "Nullen" in Zeilen oder Spalten stehen, wird vorab eine Umformung zur Vereinfachung günstig sein!
Z.B. Umformung in Dreiecksform.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} \;\cdots\cdots \;= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

Bp:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -Z1 \\ -Z1 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2.Z \\ \\ +2\ 2.Z \end{array}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\tfrac{1}{2}\ 3.Z. \\ \\ \end{array} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +\ 4.\text{Zeile} \end{array}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tfrac{9}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Vertauschen von Spalten (3 Spalten): $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{9}{2} \end{vmatrix}$

$$\det A = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{9}{2} = -36$$