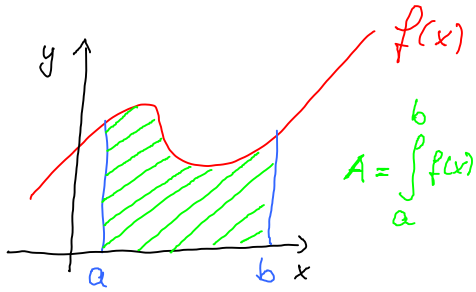
Mathematik 21.1.2015

Integralrechnung

1) $y = f(x) \longrightarrow y' = f'(x)$

$y' = f(x) \xrightarrow{?} y = f(x)$

2) Zur Flächenberechnung, z.B.



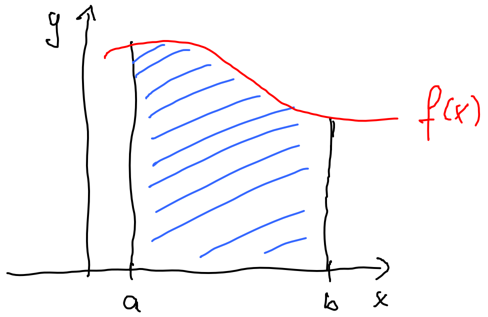
$A = \int_a^b f(x)\,dx$

1) $\Rightarrow$ unbestimmte Integral

2) $\Rightarrow$ bestimmte Integral

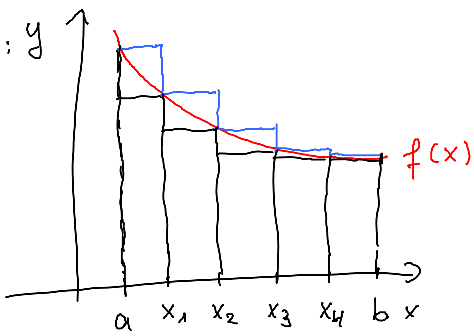
Zusammenhang ergibt sich aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ($\rightarrow$ später)

Das bestimmte Integral



Gesucht: Flächeninhalt, der von $f(x)$, x-Achse und den Parallelen zur y-Achse im Abstand a und b begrenzt wird

Vorgehen:



Zerlegung von $[a,b]$ in Teilintervalle

Länge der Teilintervallstücke

$\Delta x_1 = x_1 - a$

$\Delta x_2 = x_2 - x_1$

$\Delta x_3 = x_3 - x_2$

$\vdots$

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

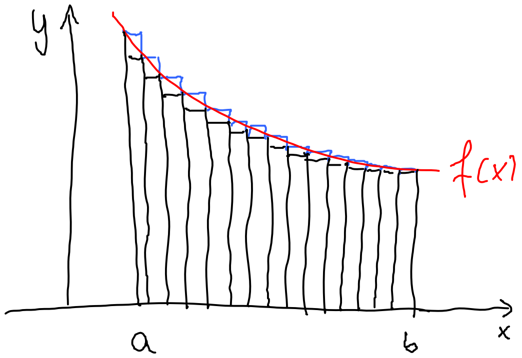
Untersumme (Aufsummieren aller "kleinen" Rechtecke)

hier: $U_5 = \Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + \Delta x_3 \cdot f(x_3) + \Delta x_4 \cdot f(x_4) + \Delta x_5 \cdot f(b)$

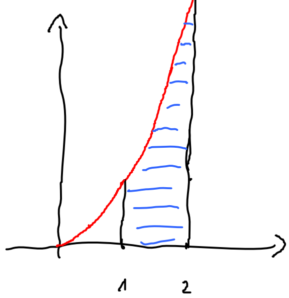
Obersumme (Aufsummieren aller "großen" Rechtecke)

hier: $O_5 = \Delta x_1 \cdot f(a) + \Delta x_2 \cdot f(x_1) + \Delta x_3\, f(x_2) + \Delta_4 \cdot f(x_3) + \Delta x_5 \cdot f(x_4)$

Es gilt: $U_5 < A < O_5$

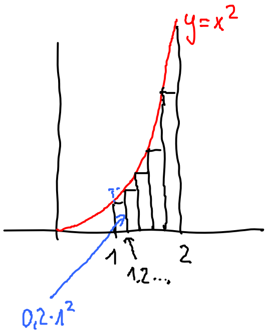


Bp: Flächenberechnung mit Hilfe von Ober- und Untersumme



$f(x) = x^2$ auf $[1,2]$

Wähle zunächst Einteilung von $[1,2]$ in 5 gleiche Teile



$\Delta x = 0.2$ für alle Teilintervalle

$$U_5 = 0.2 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot 1.2^2 + 0.2 \cdot 1.4^2 + 0.2 \cdot 1.6^2 + 0.2 \cdot 1.8^2 = \ldots = 2{,}04$$

$$O_5 = 0.2 \cdot 1.2^2 + 0.2 \cdot 1.4^2 + 0.2 \cdot 1.6^2 + 0.2 \cdot 1.8^2 + 0.2 \cdot 2^2 = \ldots = 2{,}64$$

Es gilt: $2.04 \leq A \leq 2.64$ $\qquad O_5 - U_5 = 0.6$

Nun: statt $\Delta x = 0{,}2$ wähle $\Delta x = 0{,}1$

$$U_{10} = 0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}1 \cdot 1{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 1{,}2^2 + \ldots + 0{,}1 \cdot 1{,}9^2 = \ldots = 2{,}185$$

$$O_{10} = 0{,}1 \cdot 1{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 1{,}2^2 + \ldots + 0{,}1 \cdot 2^2 = \ldots = 2{,}485$$

Es gilt: $2{,}185 \leq A \leq 2{,}485$ $\qquad O_{10} - U_{10} = 0.3$

Nun: $\Delta x = 0.05$

Dann: $U_{20} = 2{,}25875$ $\qquad O_{20} - U_{20} = 0.15$

$O_{20} = 2{,}40875$

hier gilt: $A = \lim\limits_{n \to \infty} U_n = \lim\limits_{n \to \infty} O_n = \frac{7}{3}$

NB später:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Def: Das bestimmte Integral

Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$ heißt, falls er vorhanden ist, das bestimmte Integral der Fkt. $f(x)$ in den Grenzen $x = a$ bis $x = b$

Schreibweise: $$\int_a^b \underbrace{f(x)\cdot dx}$$

Integrand

X: Integrationsvariable

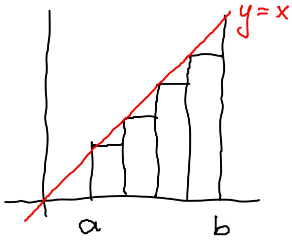
obere Integrationsgrenze

Fläche eines unendlich dünnen Rechteckes

untere Integrationsgrenze

Summe all dieser Flächen

Bp: $$\int_a^b x \cdot dx$$



Wähle $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

Zerlegungspunkte $x_k = a + k\cdot\Delta x$, $k = 0,1,2,\dots n$

(für $k=0$ $x_0 = a$)

hier: Untersumme für die Grenzwertbestimmung

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{x_{k-1}}\cdot\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a + (k-1)\cdot\Delta x\right)\cdot\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a\cdot\Delta x + (k-1)\cdot(\Delta x)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a\cdot\Delta x + \sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot\Delta x^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\cdot\sum_{k=1}^{n} k-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k\right)$$

NB: $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

Summe der ersten $n-1$ natürl. Zahlen

Formel für $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x\left(n\cdot a + \Delta x\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)\right)$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\left(n\cdot a + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}}\right) = 1 \qquad \frac{1}{n}\to 0$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$= \dots = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Also: $$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

NB: $$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Grundregeln für das bestimmte Integral

(folgen aus den Rechenregeln für Summen (Σ))

1) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$ "Festlegung"

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a<b<c$$

Zusammensetzen des Integrationsweges möglich!

4) $$\int_a^b \left(c\cdot f(x) + d\cdot g(x)\right)dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$$

"Linearität"

5) f_1, f_2 integrierbar auf $[a,b]$ $\quad f_1(x) \le f_2(x)$ für alle $x\in[a,b]$

dann gilt: $$\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$$

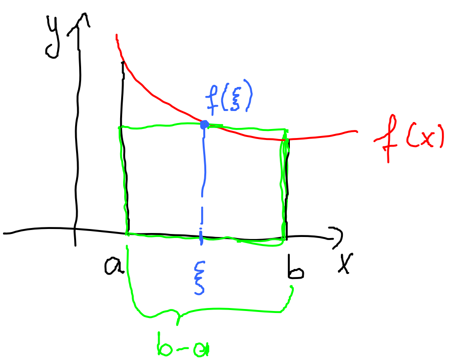
Mittelwertsatz der Integralrechnung

f stetig auf $[a,b]$

Dann ex. mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ heißt der Mittelwert der Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$



$(b-a)\cdot f(\xi)$ ist ein flächengleiches Rechteck zur Fläche unterhalb von $f(x)$ in den Grenzen a und b

Def: Flächeninhalt $\quad f$ stetig auf $[a,b]$ und $f(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$ heißt der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf $[a,b]$

Das unbestimmte Integral

Gesucht wird eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Man erkennt $(F(x) + C)' = f(x)$

$F(x)$ ist unbestimmt, da $C \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist

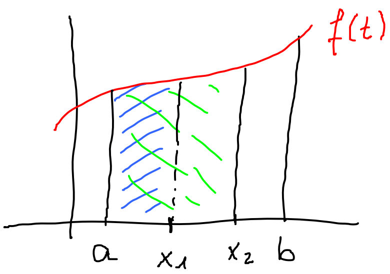
$F(x)$ heißt Stammfunktion

Die Menge aller Stammfunktionen $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ heißt das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Zusammenhang zwischen unbestimmten und bestimmten Integral

($\Rightarrow$ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)



$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

$$\int_a^{x_2} f(t)\,dt$$

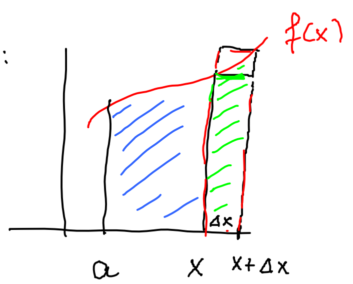
$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Sei $I_1 : x \longmapsto \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt \qquad I_2 : x \longmapsto \int_{c_2}^{x} f(t)\,dt \qquad x, c_1, c_2 \in [a,b]$

$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt - \int_{c_2}^{x} f(t)\,dt = \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{c_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt \text{ ist eine Konstante}$$

Nun:



$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x)$$

Der Zuwachs der Fläche liegt zwischen $f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$ und $f(x)\cdot\Delta x$
"große" Rechteck "kleine" Rechteck

$$f(x)\cdot\Delta x \le \Delta I \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \qquad = I'(x) \quad = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad I'(x) = f(x)$$

Aussage des Hauptsatzes ... :

Jedes unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$

und es gilt $I'(x) = f(x)$

Folgerung hieraus:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Aus $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

für $x = b$: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Auffinden von Stammfunktionen

1) durch Kenntnisse der Ableitungen von Funktionen
2) durch Integrationsregeln, die sich aus den Ableitungsregeln herleiten lassen

Einfache Stammfunktionen

1) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \; C\in\mathbb{R} \quad n \neq -1$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C$

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Regeln für geschlossen lösbare Integrale

1) Partielle Integration – Produktintegration

Erinnerung: Produktregel in Differentialrechnung $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$f(x)\cdot g'(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f'(x)\cdot g(x)$$

Integration auf beiden Seiten

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Bp: 1) $\int 2x\cdot e^x\,dx$ $\quad f(x) = 2x \quad f'(x) = 2$
$\quad g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$

$$\int 2x\cdot e^x\,dx = 2x\cdot e^x - \int 2\cdot e^x\,dx$$

$$= 2xe^x - 2e^x = e^x(2x-2) + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

2) $\int x\cdot\sin x\,dx$ $\quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$
$\quad g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x$

$$= -x\cdot\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Zu Hause: $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx$