

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zu den in der Vorlesung besprochenen Themen für die nächsten Übungsstunden jeweils vor!

Aufgabe 5.1 Vektoroperationen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \quad 6\vec{u} + 2\vec{w}, \quad -\vec{v} + \vec{u}, \quad (2\vec{u} - 7\vec{w}) - (8\vec{w} + \vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2 Skalarprodukt und Vektorprodukt dreidimensional

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{x}$

(b) $\vec{v} \times \vec{w} + 2\vec{w}$

(c) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 5.4 Vektorprodukt – Skalarprodukt zweidimensional

Es sei $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$,

d.h. der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Skalarprodukt.

Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Aufgabe 5.6 Ebenen

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

- (a) den von $(\vec{a}, \vec{b})$, bzw. von $(\vec{b}, \vec{c})$, eingeschlossenen Winkel,
- (b) die von $(\vec{a}, \vec{b})$, bzw. von $(\vec{b}, \vec{c})$, aufgespannte Fläche (Parallelogramm),
- (c) einen Normalenvektor $\vec{n}$ der durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene,

Aufgabe 5.7 Geraden und Ebenen

Gegeben seien die Punkte P_1, P_2, P_3 , die durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus 5.6 gegeben sind, sowie die weiteren Punkte P_4 und P_5 , die durch die Vektoren

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben sind}$$

- (a) Stellen Sie die Gleichungen auf für die Ebene E_1 , die durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ geht; für die Ebene E_2 , die durch $\vec{f}, \vec{g}, \vec{a}$ geht; für die Gerade g , die durch $\vec{f}, \vec{g}$ geht.
- (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P von E_1 und g .
- (c) Bestimmen Sie die Schnittgerade s von E_1 und E_2 .

Aufgabe 5.8 Ebenen

Mit $E_3 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ sei eine weitere Ebene in

Punkt-Richtungsform gegeben, neben der Ebene E_1 aus 5.7.

- Rechnen Sie die Ebenen E_1 und E_3 in die Hessesche Normalform und in die Koordinatenform um. Rechnen Sie zur Probe die Koordinatenform wieder in die Punkt-Richtungsform zurück.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{c}$ aus 5.5 zur Ebene E_1 .

Aufgabe 5.9 Matrizenmultiplikation

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.10 Matrizenmultiplikation Anwendungsaufgabe

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll

Aufgabe 5.11 Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -9$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 17$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

b)

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -9$$

Aufgabe 5.12 Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus**:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1$$

$$x_1 + 6x_2 - x_3 = 3$$

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 = -6$$

Aufgabe 5.13 Lineare Gleichungssysteme Anwendung

Berechnen Sie unter Verwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** die Gleichung der **Parabel 2. Ordnung**

$$y = ax^2 + bx + c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Aufgabe 5.14 Determinanten

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.15 Determinanten

Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

Dazu können Sie

- sich ausgiebig im Bruchrechnen üben, indem Sie direkt beginnen, nach einer Zeile bzw. einer Spalte zu entwickeln 😊
- sich mit den möglichen elementaren Umformungsmöglichkeiten von Determinanten und den Auswirkungen dieser vertraut machen (siehe Vorlesung), diese gezielt einsetzen und dann bequem die Determinante berechnen.