

Bereiten Sie die Aufgaben parallel zu den in der Vorlesung besprochenen Themen für die nächsten Übungsstunden jeweils vor!

Aufgabe 5.1 Vektoroperationen

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \quad 6\vec{u} + 2\vec{w}, \quad -\vec{v} + \vec{u}, \quad (2\vec{u} - 7\vec{w}) - (8\vec{w} + \vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2 Skalarprodukt und Vektorprodukt dreidimensional

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{x}$

(b) $\vec{v} \times \vec{w} + 2\vec{w}$

(c) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w}$

Aufgabe 5.3 Vektoren – lineare Unabhängigkeit

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. (Zur Erinnerung: linear unabhängig bedeutet, dass der Nullvektor nur „trivial“ kombinierbar ist aus diesen Vektoren)

Aufgabe 5.4 Vektorprodukt – Skalarprodukt zweidimensional

Es sei $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$,

d.h. der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Skalarprodukt.

Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

Aufgabe 5.5 Betrag von Vektoren

Bestimmen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Aufgabe 5.6 Ebenen

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die durch diese drei „Punkte“ geht:

- (a) in der Punkt-Richtungs-Form
- (b) in der Koordinatenform
- (c) in der Hesse-Normalform

Aufgabe 5.7 Geraden und Ebenen

Gesucht ist die Geradengleichung in Punkt-Richtungs-Form, die durch den Punkt

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ geht, und}$$

a) parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ verläuft

b) durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft

c) die x-Achse bei 5 schneidet und parallel zur z-Achse verläuft (bei Benennung der dreidimensionalen Koordinatenachsen mit x,y,z)

Aufgabe 5.8 Winkel zwischen Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die von

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eingeschlossenen Winkel!

Aufgabe 5.9 Matrizenmultiplikation

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.10 Matrizenmultiplikation Anwendungsaufgabe

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll

Aufgabe 5.11 Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -9$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 17$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

b)

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -9$$

Aufgabe 5.12 Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus**:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.13 Lineare Gleichungssysteme Anwendung

Berechnen Sie unter Verwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** die Gleichung der **Parabel 2. Ordnung**

$$y = ax^2 + bx + c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Aufgabe 5.14 Determinanten

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$