

V MA1 21.10.2015

Tutorium Mi 15-16³⁰, 3.111 ab 21.10.15

P-Termin verpasst → Beate Breiderhoff

Ü-Auslast: $D_i \leq \begin{matrix} 40 \\ 24 \\ 3 \end{matrix}$ $D_i = 17-18^{\text{TO}}$ $M_i \leq \begin{matrix} 64 \\ 80 \end{matrix}$

Letztes Mal : Summen, Doppelsummen

Logarithmus: $x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$

Binomial coefficient

Pascal'sche Dreieck

$n \backslash k$	0	1	2	3		
0	①					
1	①				①	
2	①				②	①
3	①				③	③
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Vereinfachen: a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

$$b) \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$a) \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \dots \cdot \cancel{1}}{\cancel{(n-1)} \cdot \dots \cdot \cancel{1}} = (n+1)n$$

$$b) \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1 + 1 \cdot n}{\underbrace{n(n-1)!}_{n!}} = \frac{1+n}{n!}$$

Aufg. $(a+b)^7$

1) $n=0$

				1				
1				1	1			
2			1	2	1			
3		1	3	3	1			
4		1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} a^k b^{7-k}$$

$$= 1a^0b^7 + 7a^1b^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3 + 21a^5b^2 + 7a^6b^1 + 1a^7b^0$$

Zahlenfolgen

$$A: 100n + n^2$$

$$B: 3n^2 - 5$$

$$A': 100n + \frac{n^2}{10!}$$

$$B': \frac{3n^2 - 5}{10!}$$

Wer ist schneller für große n : A oder B ?
 A' oder B' ?

A ist um Faktor 3 schneller als B für $n \rightarrow \infty$
(kleiner)

A' " " " " " " B' " "

Bsp für Folgen

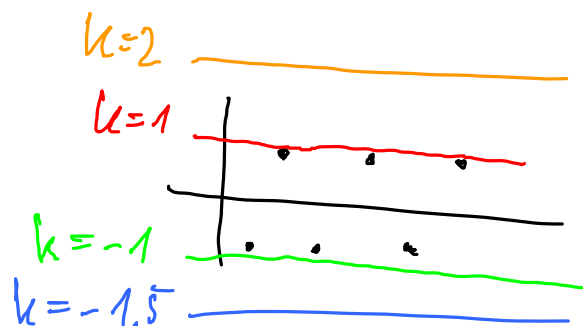
2) $a_n = 2^n$: 1, 2, 4, 8, 16, ... ($a_n \rightarrow \infty$)

3) $a_n = (-1)^n$: (-1), +1, -1, +1, ... alternierende Folge

Bsp. Beschränktheit

$$a_n = (-1)^n \quad \text{n.o.b.}$$

n.u.b.



Grenzwert

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - g| < \varepsilon$$

Sprachliches Bild: Endlich viele "Jugendstünder" erlaubt, dann aber ε -dicht an g dran

Beispiele für Grenzwerte

1) $a_n = \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

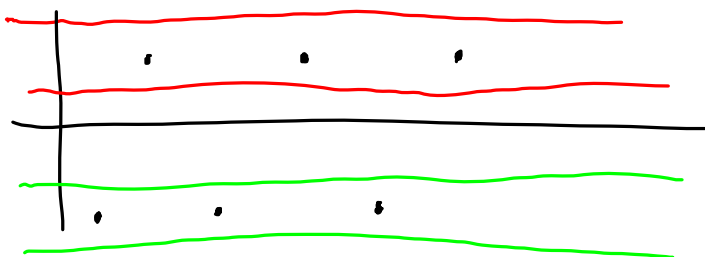
Bew: $|a_n - 0| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Wähle $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow$ für alle $n \geq n_0: a_n < \varepsilon$
 $\frac{1}{n} < \varepsilon$

2) $a_n = \frac{2n-1}{3n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$
 $\uparrow$
 $\frac{1}{n}$ erweitern

3) $a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, \dots$ hat keinen Grenzwert
weil für $\varepsilon = 0.5$ kein Band möglich
 $\Rightarrow$ divergent



kein Banach für alle a_n

Wieso ist $0 \cdot \infty = ?$ (uneut scheidbar)

$$1) \quad \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$2) \quad \frac{1}{n} \cdot 3n = 3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$$

$$3) \quad \frac{1}{n^2} \cdot 5n = \frac{5}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Rechnen mit Grenzwerten

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} \stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Übung 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 \stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=}$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{49}{9}$$

$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}}$$

$$\hookrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n-1} \right) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{g.P.i.N.}}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+\frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1-\frac{1}{n}} \right)$$

$$= (\infty - \infty) = ?$$

2. Ansatz 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{HN}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cancel{(n-1)} - n^3 \cancel{(n+1)}}{(n+1)(n-1)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 - n^3}{n^2 - 1} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{g.P.i.N.: } n^2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{-\infty}{1-0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

4) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{g.P.i.N.} \cdot 10^{-2k}}}{=}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^{k-2k} + 6 \cdot 10^{2k-2k}}{0.4 \cdot 10^{k-2k-3} - 20 \cdot \frac{1}{100} \cdot 10^{2k-2k}}$$

$$= \frac{6 \cdot 10^0}{-0.2 \cdot 10^0} = \underline{\underline{-30}}$$

N.R.

$$10^{2k-2} =$$

$$10^{2k} \cdot 10^{-2} =$$

$$10^{2k} \cdot \frac{1}{100}$$

N.R.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 10^{-k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

$\uparrow q = 0.1$

$$= 0$$