

V MA 1 - 28.10.2015

Pascal'sche Dreieck

Folgen: Grenzwert g : beliebig nahe
Annäherung der a_n

Rechnen mit ∞ (ganz vorsichtig)

was geht: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, ...

was nicht geht: $0 \cdot \infty = ?$, $\infty - \infty = ?$
↑ unentscheidbar

g.P. i. N. (größte Potenz im Nenner)

Fixpunkt-Iteration:

Sei $x \neq 0$

$$x^2 = 2 \quad | + x^2$$

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad | : x, x \neq 0$$

$$2x = x + \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$



↑ ↑ ↗
 a_n a_{n-1}

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right)$$

Starte mit $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right)$$

⋮

Andere Bsp.

$$x \ln(x) = 5$$

Wenn $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ strebt, dann $g = \frac{1}{2} \left(g + \frac{2}{g} \right)$

$\Rightarrow g$ ist Lsg für $x^2 = 2$

$\Rightarrow$ Mit Excel ergibt sich schnell $g = 1.414...$

Landau'sche O-Notation

A: $a_n = 2n^3 - n^2$

B: $b_n = n$

Ist $A \in O(n)$? Ist $\frac{2n^3 - n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ beschränkt?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{1} \rightarrow \infty$$

$\uparrow$
g.P.in.

Antwort: Nein.

Tatsächlich ist $A \in O(n^3)$, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2}{n^3} \rightarrow 2$
ist beschränkt

Darüber hinaus ist $A \in O(n^4), O(n^5), \dots, O(n^k \ln n)$
und auch $A \in O(n^3 + 2n + 25)$

In der Praxis suche

1) möglichst einfaches b_n (also n^3 und nicht $n^3 + 2n + 25$)

2) möglichst billiges b_n (also n^3 und nicht n^4 od. $n^5, \dots$)

Beispiel: $a_n = 6n \log(n) + 270(n) + 4$
 $a_n \in O(n \log(n))$

Wachstums-
klassen

$O(1) < O(\log(n))$
 $< \mathcal{I}(n) < O(n \log n)$
 $< O(n^2) < O(n^2 \log n)$
 $< \dots < \dots$
 $< O(2^n)$

Übung

Folge	$O()$
$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$
$7n^5 + 26n^6$	Was ist schnellst wachsender Term n^6. Deshalb $O(n^6)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 26n^6}{n^6} \stackrel{\text{g.P.N.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot \frac{1}{n} + 26}{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 26$
$n + 3n^2 - 2n \log(n)$	Ansatz: $O(n^2)$ (denn $O(n) < O(n^2)$ und $O(n \log n) < O(n^2)$)
$\frac{n^4 + n^2}{n + 5}$	Ansatz $O(n^3)$ denn: $\frac{n^4 + n^2}{n + 5} \stackrel{\text{g.P.N.}}{=} \frac{n^3 + n}{1 + \frac{5}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n^3$ deshalb $O(n^3)$
$\frac{n^4 + n^2}{n + 5} - n^3$	$\stackrel{\text{H.N.}}{=} \frac{n^4 + n^2 - n^3(n + 5)}{n + 5} = \frac{\cancel{n^4} + n^2 - \cancel{n^4} - 5n^3}{n + 5} \stackrel{\text{g.P.N.}}{=} \frac{n - 5n^2}{1 + \frac{5}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -5n^2$

deshalb: $O(n^2)$

$$\left(\text{Probe: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + n^2}{n^2} - n^3 \right) = \dots = -5 \right)$$

Zur Übung: "Erster / Zweiter"

Lsg: Fall 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{3}$

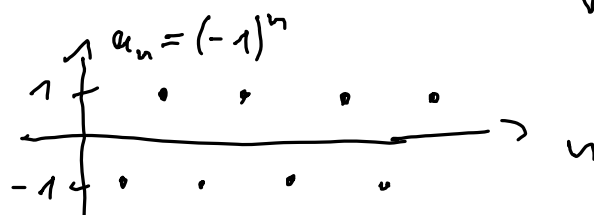
Fall 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n'}{B_n'} = \frac{1}{3}$

Fall 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{D_n} = 50$

<u>Übung</u>	beschränkt + konverg. $\frac{1}{n}$	beschränkt + divergent $(-1)^n$	<u>$n \in \mathbb{N}$</u>
		unbeschränkt + divergent 2^n	

a) Jede bestimmt-div. Folge ist div. WAHR

b) Jede div. Folge ist best.-div. FALSCH wg $(-1)^n$



c) Eine Folge ist konv. oder geht gegen $-\infty$ oder $+\infty$

FALSCH wg $(-1)^n$

d) $a_n = (\infty, \infty, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$ ist keine Folge, weil ∞ keine Zahl ist.

Modulare Arithmetik

"Rechnen mit Rest"

Anwendung: Kryptographie (RSA)

ISBN (Prüfziffern)

modulo im Alltag: Uhrzeit $13^{\text{oo}}, 1^{\text{oo}}$ selbe Restklasse

Winkel $363^\circ \equiv 3^\circ$

Bsp zu $a^c = b^c \pmod{m}$

$$80^{500} \pmod{8}$$

$$= 0^{500} \pmod{8} = \underline{\underline{0}}$$

Gegenbeispiel "Kürzen": $2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod{6}$ ✓

Falsch: $2 = 5 \pmod{6}$ ✗

Nicht mod-Gl. durch Faktoren dividieren

Prüfziffern ISBN 3-446-19873-p . Was ist p

$$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + \dots + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$$

$$250 + p = 0 \pmod{11}$$

$$250 - 220 - 22 + p = 0 \pmod{11}$$

$$8 + p = 0 \pmod{11} \quad | +3$$

$$\underbrace{8+3}_{11} + p = 3 \pmod{11}$$

$$\underline{\underline{p = 3 \pmod{11}}}$$

Übung a) $10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3$
 $= 0 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 261 - 220 - 33 = 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 8 = 0 \pmod{11} \quad \downarrow$$

b) Skizze: $10 \cdot x + 9 \cdot 4 + \dots + 3 = 0 \pmod{11}$

$$10 \cdot x + 231 = 0 \pmod{11}$$

$$10 \cdot x + 220 + 11 = 0 \pmod{11}$$

$$10x = 0 \pmod{11}$$

$\Rightarrow$ nur für $x=0$ scheinbar gültige ISBN

x	10·x	
0	0	✓
1	10	-
2	20	-
⋮		
9	90	-