$\boxed{\text{V MA1 – 4.11.2015}}$

Wdh. $\boxed{\text{O-Notation}}$

Folge $A = (a_n)$ ist von $O(B)$ mit $B = (b_n)$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{Quotient } \frac{a_n}{b_n} \text{ beschränkt}}$

Immer dann der Fall, wenn $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert

Bsp $a_n = (-1)^n \in O(1)$

weil $\frac{a_n}{1} = \frac{(-1)^n}{1}$ offensichtlich beschränkt

---

Modulo-Arithmetik

$117 = 2 \mod 5$ (Vielfache von 5 addieren / abziehe)

$116^{100} \mod 5$

$= 1^{100} \mod 5 = \underline{\underline{1}}$

Reelle Funktionen

Ü Def-bereich

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\sqrt{x+12}}{(x-1)(x+5)}$$

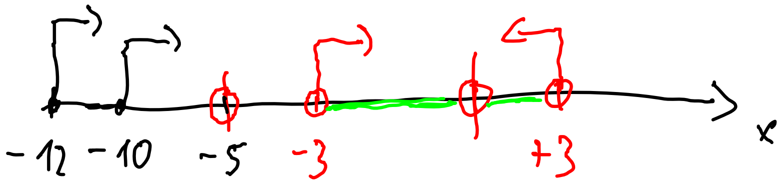
Radikand ≥ 0

Nenner $\neq 0$

$$\begin{cases} x+10 \geq 0 \iff x \geq -10 \\ x+12 \geq 0 \iff x \geq -12 \\ 9-x^2 > 0 \iff 9 > x^2 \iff |3| > |x| \\ \qquad \iff |x| < 3 \iff x \in]-3,3[\end{cases}$$

$x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$

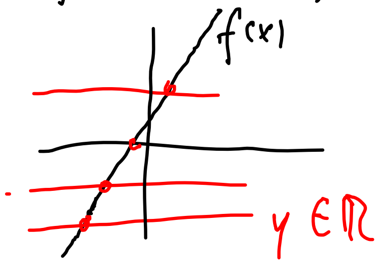
$x+5 \neq 0 \iff x \neq -5$



$$\underline{\underline{D =]-3,3[\setminus \{1\}}}$$

injektiv	:	<u>höchstens</u> ein x für jedes $y=f(x)$
surjektiv	:	<u>mindestens</u> " " " " " "
bijektiv	:	<u>genau</u> " " " " " "

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$



injektiv

surjektiv

bijektiv

(genau ein Schnittpunkt)

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$: $g(x) = x^2$

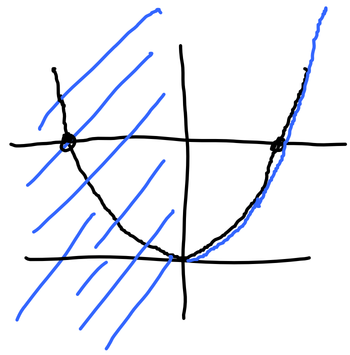
$y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

surjektiv

NICHT injektiv

NICHT bijektiv

Umkehrfunktion



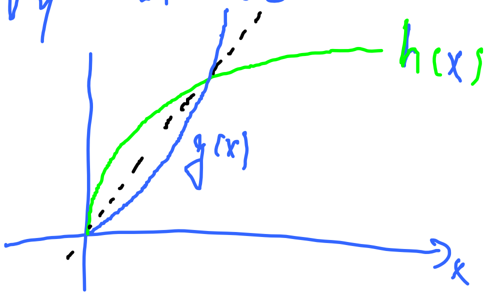
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

Für alle $y > 0$ zwei Schnittpunkte

$f(x)$ ist nicht bijektiv

$g(x): \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $g(x) = x^2$ ist bijektiv

$h(y) = \sqrt{y}$ ist die Umkehrfunktion zu $g(x)$



$$g(x) = x^2 = y$$

$$x = \underline{\underline{\sqrt{y} = h(y)}}$$

wg. $D = \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$f(x) = 2x + 1 = y$$

$$2x = y - 1$$

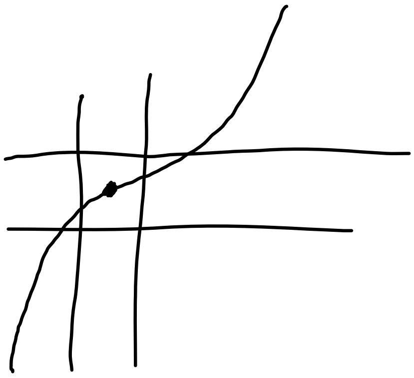
$$x = \underline{\underline{\frac{y-1}{2} = h(y)}}$$

Grenzwert einer Funktion

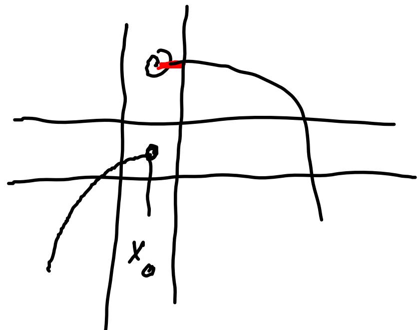
Beispiel

x	± 1	± 0.2	± 0.1	± 0.01
$\frac{\sin(x)}{x}$	0.841	0.993	0.998	0.99998

Es scheint so, daß $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$



kein Grenzwert bei $x=0$ (s. unten)



kein Grenzwert bei x_0

Bsp zu Grenzwert

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ hat bei $x_0 = 0$ keinen Grenzwert

Denn: $x_n = \frac{1}{n}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

also divergent

$\overset{S\,4.2}{\Rightarrow}$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht

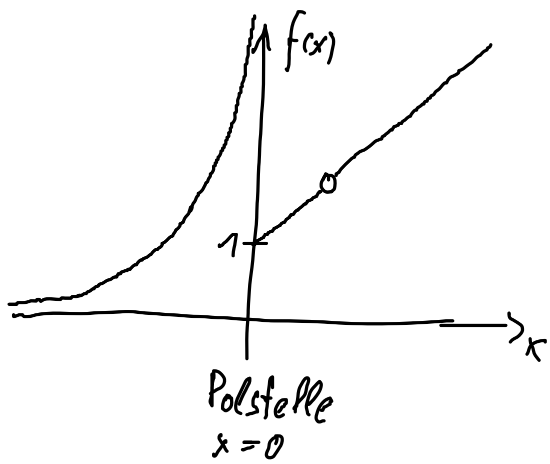
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ Denn: mit Taylorreihe für $\sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \ldots\right) = 1 - 0 + 0 - + \ldots$$
$$= \underline{\underline{1}}$$

Komplexeres Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{f. } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{x} & \text{f } x < 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, denn f. $x_n \xrightarrow{n \to \infty} -\infty$
gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{x_n}\right) = -\frac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, denn f $x_n \to +\infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = +\infty$, denn für $x_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ gilt

$x_n < 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, denn für $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}\right) = \frac{0-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht (weil $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$)

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ denn $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x+1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Übung

1 einsetzen

a) $\lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1}\right] = 2\cdot\cos(0) + \frac{\sin(0)}{2} = 2 + \frac{0}{2} = \underline{\underline{2}}$

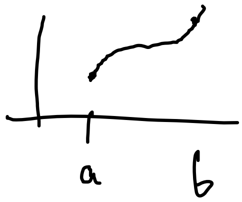
b) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{\underbrace{x^2-1}_{(x-1)(x+1)}}\right]$ Einsetzen geht nicht, $\infty - \infty$ Situation

Hauptnenner:

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1) - (x^2+2x+3)}{(x-1)(x+1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x^2}+3x+2-\cancel{x^2}-2x-3}{(x-1)(x+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Stetigkeit - Kapitel : bitte im Selbststudium

f ist stetig in $[a,b]$ $\iff$  in einem Stück zeichenbar

f ist stetig in x_0 $\iff$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Grenzwert = Funktionswert bei x_0