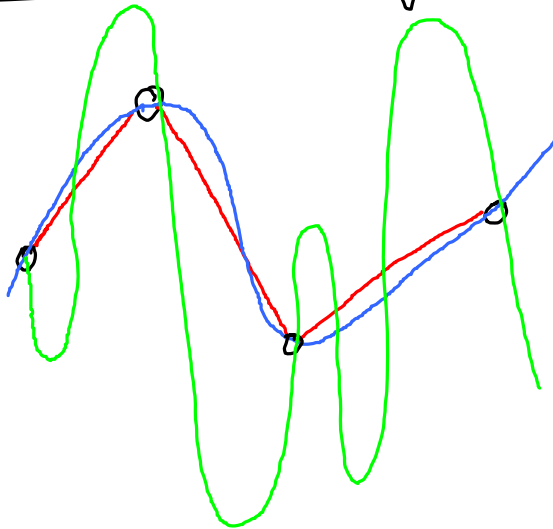


[V MA 1 - 11.11.2015]

Ü Di 17⁰⁰ fällt ab nã Woche aus (nur 1-2 TN)

Differentialrechnung

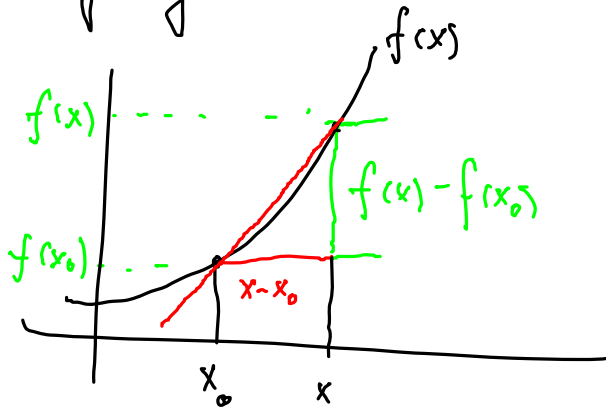


rot: Geradenstücke
Problem: Knicke

grün: keine Knicke,
aber zu viele "Ausschläge"

blau: "glatte" und hat
eine möglichst geringe
Steigung

Steigung einer Funktion im Punkt x_0



Steigung Gerade

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$x = x_0 + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\cancel{x_0 + h} - \cancel{x_0}} = f'(x_0)$$

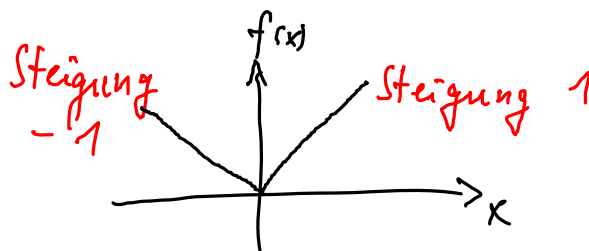
Beispiel ① $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\lim_{h \rightarrow 0}}{=} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \stackrel{\lim_{h \rightarrow 0}}{=} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist in x_0 differenzierbar

Beispiel ②

$$f(x) = |x|$$



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Was ist mit $x=0$? Hier ist der links- und rechts-seitige Grenzwert von $f'(x)$ verschieden

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 \neq +1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existiert nicht

$\Rightarrow f(x)$ ist in $x=0$ nicht differenzierbar
(Funktion hat Knick)

Ableitungen praktisch

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$x^1 = 1 \cdot x^0 = 1$$

Beispiel Quotientenregel

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\begin{array}{l} u = x^2, u' = 2x \\ v = x+1, v' = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1) \cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Beispiel Kettenregel

$$1) h(x) = (\sin x)^3 = g(f(x))$$

$$\begin{array}{l} g(u) = u^3, g'(u) = 3u^2 \\ f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x \end{array}$$

$$h'(x) = \underline{\underline{3(\sin x)^2 \cdot \cos x}}$$

$$2) h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^2$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2(x^2+2x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} g(u) = u^2, g'(u) = 2u \\ f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \end{array}$$

(s. voriges Bsp)

Übung 9

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{Quot. regel}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v u' - v' u}{v^2} \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot 3x^2 - 2(x+1) \cdot x^3}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1) 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$b) g(x) = \sin(x^3) = g(s(x))$$

$$g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$c) h(x) = e^{\sin(x^2)} = g(f(x))$$

$$\underline{\underline{h'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}}$$

N.R.

$$u(x) = x^3, \quad u' = 3x^2$$

$$v(x) = (x+1)^2, \quad v' = 2(x+1) \cdot 1$$

$$= g(s(x)) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u) = u^2, \quad g' = 2u \\ s(x) = x+1, \quad s' = 1 \end{array} \right.$$

Kettenregel

$$\text{oder } v(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$v'(x) = 2x + 2$$

N.R.

$$g(u) = \sin u, \quad g' = \cos u$$

$$s(x) = x^3, \quad s' = 3x^2$$

N.R.

$$g(u) = e^u, \quad g' = e^u$$

$$f(x) = \sin(x^2) = g(s(x))$$

$$g(u) = \sin u, \quad g' = \cos u$$

$$s(x) = x^2, \quad s' = 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Beispiel Betrag

$$g(x) = \left| \frac{1}{x} \right| = |x^{-1}|$$

1. Fall $x > 0$: $g'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

2. Fall $x < 0$: $g'(x) = (-x^{-1})' = +x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Hier ist $g'(0)$ nicht def (Polstelle)

Tipps zum Ableiten

a) $\left(\frac{1}{x}\right)'$ nicht über Quotientenregel, sondern über $(x^{-1})' = -x^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{(x+1)^5}\right)' = \left((x+1)^{-5}\right)' = -5(\underline{x+1})^{-6} \cdot 1 = -\frac{5}{(x+1)^6}$

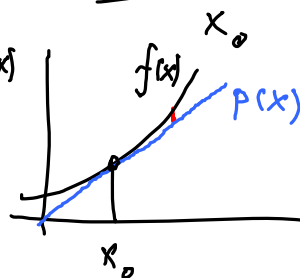
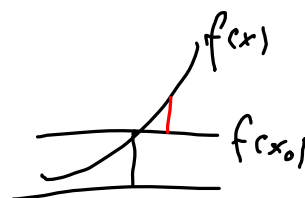
Satz von Taylor

Funktion $f(x)$ in x_0 durch Polynom n . Grades annähern

1) $n=0$: Konstante $f(x_0)$

2) $n=1$: Gerade $f(x_0) + m(x-x_0) = p(x)$
(Linearisierung)

3) $n=2$: Parabel ...



Beispiel $f(x) = \ln(x)$ für $x_0 = 1$, $n=3$ Taylor polynom:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1) = f^{(n)}(x_0)$
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$+2x^{-3}$	+2
$n+1=4$	$-6x^{-4}$	////

Taylor polynom

$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2!} (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3$$

$$\ln(1.5) \approx P_3(1.5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.41\bar{6}$$

Welcher Fehler steckt in dieser Abschätzung

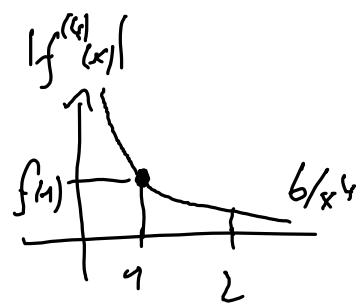
Restgliedabschätzung

$$|f^{(4)}(x)| = |-6x^{-4}| \quad \text{im Intervall } [1, 2]$$

monoton fallend $\Rightarrow$ größter Wert

$$\text{liegt am linken Rand} \Rightarrow C = |f^{(4)}(1)| = \frac{6}{1^4} = 6$$

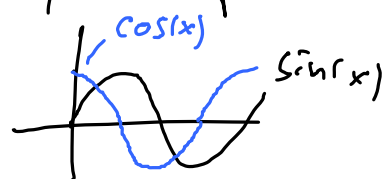
ist obere Schranke



$$\begin{aligned} \text{Fehler: } R_n(1.5) &\leq \frac{C}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} = \frac{6}{4!} \cdot (0.5)^4 \\ &= \underline{\underline{0.0156}} \end{aligned}$$

Übung $f(x) = \sin(x)$, Taylorpolynom für $n=5, x_0=0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
$n+1=6$	$-\sin(x)$	<u>1</u>



Taylorpoly:

$$\begin{aligned} P_5(x) &= \frac{1}{1!}(x-0) - \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

Restglied: Simple Abschätzung

$$|f^{(6)}(x)| = |\sin(x)| \leq 1 = C$$

Fehler für $x=0.3$: $R_5(0.3) = \frac{C}{6!} \cdot (0.3)^6 = \frac{(0.3)^6}{6!} \approx 1 \cdot 10^{-6}$

Probe : $P_5(0.3) = 0.295520\dots$
 $\sin(0.3) = 0.2955202$ } $\ominus \rightarrow k.f. \cdot 10^{-8}$

