

V MA 1 - 18.11.2015

Orga: nÄ Woche: Profil²-Woche
⇒ keine V, Ü

zu Profil²: Christiane Grünloh
INF-Sekretariat

danach V-Wechsel: Ane Schmitter

Ü ⇒ schrumpfende TN-Zahl

Appell: dranbleiben!

Wdh Satz von Taylor

Ziel: komplizierte Funktion durch Polynom nähern

Bsp: Funktion $\sin(x)$, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
Poly-Grad $n = 5$. Was ist $\sin(0.3)$?

Lsg:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
5	$\cos x$	1
6	$-\sin x$	0



jeder Term $\cdot \frac{x^n}{n!}$

$$P(x) = 1 \cdot \frac{x}{1!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!}$$

Restglied: $R(x) = C \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ wobei C obere Schranke $|f^{(n+1)}(x)|$ in $[x_0, x]$

$\nearrow$
 $0 \quad 0.3$

Variante 1: grobe Abschätzung, gültig für alle x

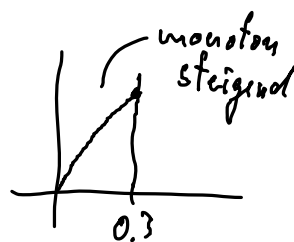
$$|-\sin(x)| \leq 1 = C$$

$$\Rightarrow R(0.3) = 1 \cdot \frac{0.3^6}{6!} \approx 1 \cdot 10^{-6}$$

Variante 2: feinere Abschätzung, gültig für $x = 0.3$

Was macht $|-\sin(x)| = \sin(x)$ in $[0, 0.3]$

Genauere Abschätzung $|-\sin(x)| \leq \sin(0.3) = C$



$$\Rightarrow R(x) = \sin(0.3) \cdot \frac{x^6}{6!} \approx 2.9 \cdot 10^{-7} \quad \forall x \in [0, 0.3]$$

(ii) $f(x) = \cos(x) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Wdh. $h(x) = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

$$h'(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$g(x) = \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

$$g'(x) = \underline{\underline{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = -\sin(x) + \underbrace{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}_{\sin(x)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \sin(x)}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cos(x)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$\cos x + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$	1
1	$-\frac{1}{2} \sin(x)$	0
2	$-\frac{1}{2} \cos(x)$	$-\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2} \sin(x)$	<u> </u>

$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{x^0}{0!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2!}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

Abschätzung für C

$$\left|\frac{1}{2} \sin(x)\right| \leq C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |R_2(x)| = C \frac{|x|^3}{3!}$$

$$\Rightarrow |R_2(0.5)| \approx \underline{\underline{0.01}}, \quad |R_2(-2)| \approx \underline{\underline{0.66}}$$

L'Hospital-Regel

Bsp $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Situation} \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}, \quad \text{Grenzwert existiert}$

Übung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Sit.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0/0-Sit.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Eigenschaften diff-barer Fkt.

Monotonie

(1. Able.)

Polstellen

Krümmung

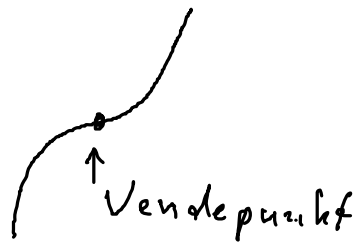
(2. Able.)

Wendepunkte

Symmetrie

Asymptoten

Extremwerte (Max., Min)



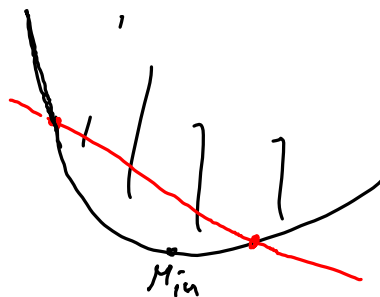
Wechsel der Krümmung



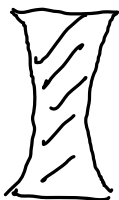
Krümmung



konkav



konvex



konkave Linse



konvexe Linse

Merkspruch: Ist der Bauch konkav, war die Anna brav
 ist der Bauch konvex, hatte Anna ...

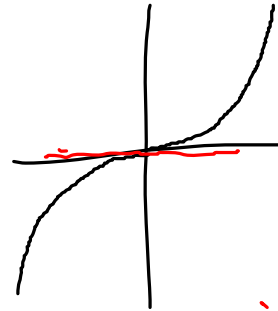
Bsp $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 6x = 0 \text{ f. } x=0 \Rightarrow \text{keine Aussage}$$

$$\boxed{f'''(x) = 6} \neq 0 \text{ f. } x=0 \text{ nach Satz 55-14}$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$



$x=0$ ist
Wendepunkt

wg $f'(x)=0$
(Horizontale)

ist $x=0$ Sattelpunkt

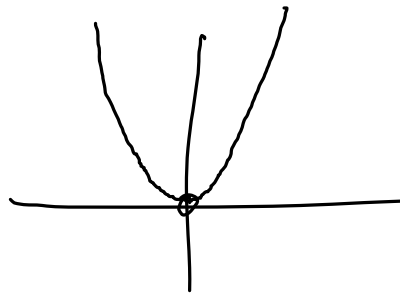
Bsp. $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

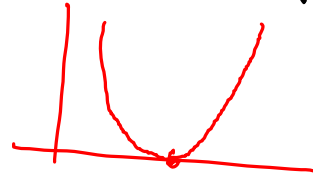
$$f''(x) = 3 \cdot 4 x^2 = 0 \text{ f. } x=0$$

$$f^{(3)}(x) = 24x$$

$$\boxed{f^{(4)}(x) = 24} \neq 0 \text{ f. } x=0$$



ii) Nullstellen, Wendepunkte + Wendetangente
für $f(x) = \underbrace{x}_{a=0} \underbrace{(x-3)^2}_{b=0}$



• Nullstellen $\underbrace{x=0}_{a=0} \vee \underbrace{x=3}_{b=0}$

• WP: Produktregel für $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + v'u \\ &= (x-3)^2 + 2(x-3) \cdot x \\ &= (x-3)[(x-3) + 2x] \\ &= (x-3)[3x-3] \\ &= 3 \underbrace{(x-3)}_a \underbrace{(x-1)}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x & u' &= 1 \\ v &= (x-3)^2 & v' &= 2(x-3) \end{aligned}$$

N.D.

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \vee \quad x=1$$

Kandidaten Extremstelle

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f''(x) = 3(2x - 4) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \quad \text{WP-Kandidat}$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=2 \text{ ist WP}}}$$

Wendetangente $f(2) = 2 \cdot 1 = 2$
 $f'(2) = -3$

$$\Rightarrow \boxed{w(x) = -3(x-2) + 2}$$

(ii) $f(t) = \frac{k}{t} + 100 + 3t^3$

$$f'(t) = -\frac{k}{t^2} + 9t^2 = 0 \Leftrightarrow 9t^2 = \frac{k}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow t^4 = \frac{k}{9} = \frac{90000}{9} = 10000 = 10^4 \Leftrightarrow \boxed{t = 10}$$

$$f''(t) = 2\frac{k}{t^3} + 18t \Rightarrow f''(10) > 0 \Rightarrow \boxed{t = 10 \text{ Minimum}}$$

