

Mathematik - Vorlesung

2.12.2015

ab heute : Dozentin A. Schmitter

Vorlesungen 2015 : 2.12., 9.12., 16.12.

2016 : 6.1. 13.1., 20.1., 27.1.

+ Üb.
Mi

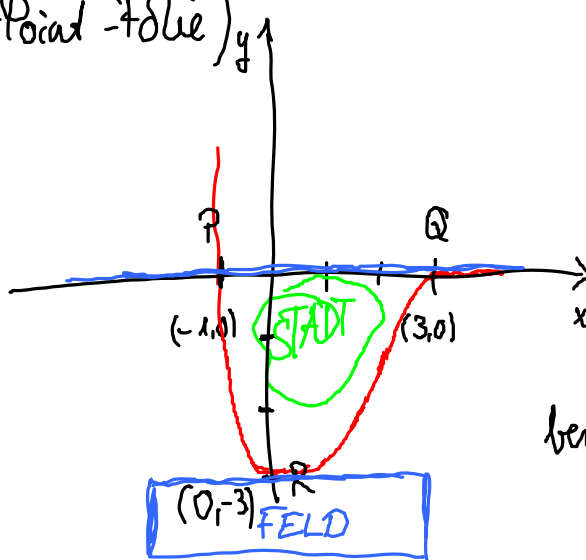
Dienstag keine Übungen
am 5.1.

Themen : Lineare Algebra
Grundlagen Integralrechnung

Lineare Algebra

Bp. (s. PowerPoint-Folie)

Skizze :



$$* y = \underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + \underline{c}x^2 + \underline{d}x + \underline{e}$$

a, b, c, d, e sind
die Unbekannten

benötigt wird auch: y'

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Informationen in allg. Gleichung * einsetzen:

Straße geht durch $P(-1,0)$: $0 = a - b + c - d + e$

lineare Gleichung
mit 5 Unbek.

Straße geht durch $Q(3,0)$: $0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

Straße geht durch $R(0,-3)$: $-3 = e$

Straße berührt in $R(0,-3)$: $0 = d$

$f'(0)=0$
Straße mündet in $Q(3,0)$ tangential : $0 = 108a + 27b + 6c + d$
 $f'(3)=0$

lineares Gleichungssystem:

a	b	c	d	e	Lösung
a	-b	+c	-d	+e	= 0
81a	+27b	+9c	+3d	+e	= 0
0a	+0b	+0c	+0d	+e	= -3
0a	+0b	+0c	+d	+0e	= 0
108a	+27b	+6c	+d	+0e	= 0

Unbekannte:
 a, b, c, d, e

Matrix A					Lösungsvektor $\vec{b}$
1	-1	1	-1	1	0
81	27	9	3	1	0
0	0	0	0	1	-3
0	0	0	1	0	0
108	27	6	1	0	0

erweiterte Koeffizientenmatrix des lin.-GS

$(a, b, c, d, e) = \vec{x}$ Variablenvektor

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

In diesem Fall mit $d=0$, $e=-3$ vereinfacht sich die erweiterte Koeffizientenmatrix wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & | & d \\ 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 81 & 27 & 9 & | & 3 \\ 108 & 27 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$a - b + c - 0 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow a - b + c = 3$$

↓

↓ Stoff der Vorlesung in den nächsten Wochen

↓

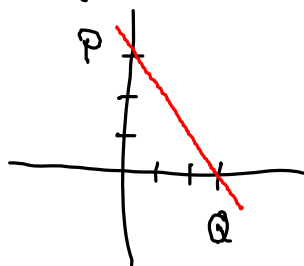
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{36}{108} & | & \frac{84}{108} \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

erw. Koeffizientenmatrix
in Treppenhufenform

Lösung: $y = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3$

Einwurf: Frage: Die gerade Straße verläuft durch $P(0,3)$ und $Q(3,0)$

Die Umgehung mündet in Q tangential, welche Steigung hat die gerade Straße und die Umgehungsstraße in Q ?

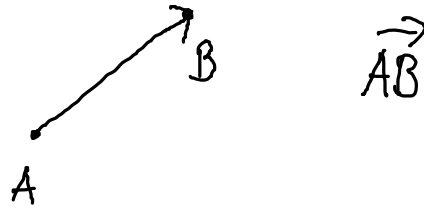


Steigung: -1

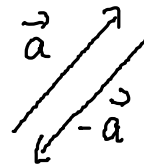
Vektorrechnung

Skalare: messbare Größen $z_p: 3m$
 $5^\circ C$

Vektor : zusätzlich Richtung $\vec{s}$
 Angabe: Länge und Richtung Bp: Kraft $\vec{F}$



parallele Vektoren $\vec{a}$ $\vec{b}$

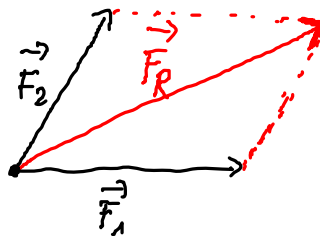


inverse Vektor

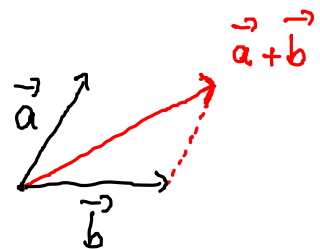
Vektoren in der Ebene

Addition :

Physik :

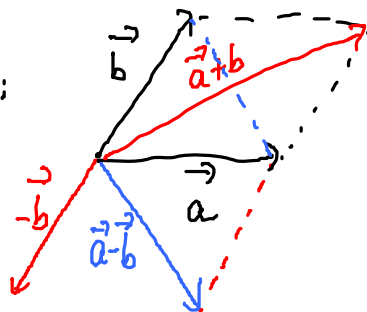


Mathematik

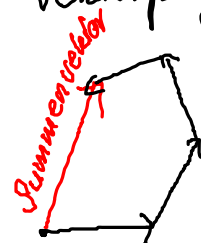


Subtraktion :

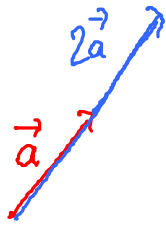
$$\vec{a} - \vec{b} = ?$$



Vektorpolygon

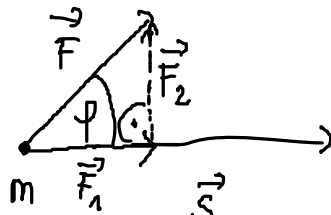


Multiplikation mit einem Skalar



$$2 \cdot \vec{a} = ? \quad \text{doppelt so lang}$$

Skalarprodukt



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Die Arbeit, die $\vec{F}$ an m auf $\vec{S}$ verrichtet
ist $|\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}|$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_1| = \cos \varphi |\vec{F}|$$

$$\text{und damit } W = |\vec{S}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos \varphi \quad \text{Physik}$$

Mathematik: Def: Skalarprodukt

$$\vec{a}, \vec{b}, \quad \angle \vec{a}, \vec{b} = \varphi$$

$$c = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
Skalar Skalar Skalar
= Zahl = Zahl = Zahl

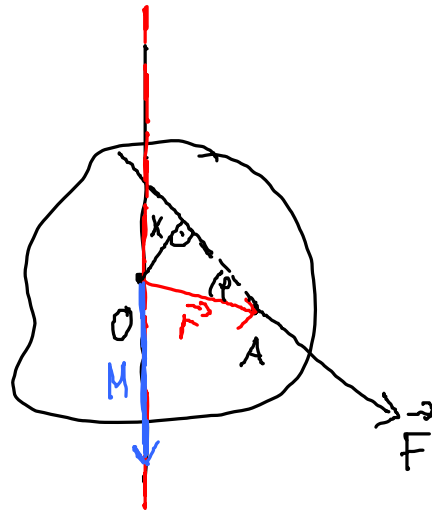
Merke: Das Skalarprodukt ist eine reelle Zahl!

$$\text{Frage: } \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \quad \text{falls } \vec{a} \neq \vec{0}, \quad \text{da } \cos 0^\circ = 1$$

$$\text{Frage: Welchen Winkel schließen } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ ein, wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \varphi = 90^\circ \text{ bzw. } \frac{\pi}{2}$$

Vektorprodukt

Herleitung aus der Physik



$$\vec{r} = \vec{OA}$$

$$x = |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Drehmoment } |\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot x = \vec{F} \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

Mathematik: Vektorprodukt $\vec{a}, \vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b}$ Kreuzprodukt

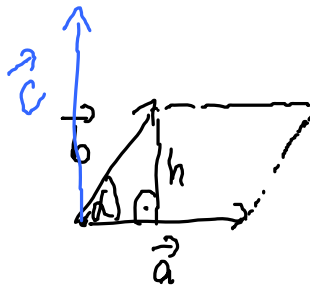
$\vec{a} \times \vec{b}$ beschreibt den Vektor $\vec{c}$ mit folg. Eigenschaften:

$\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein "Rechtsystem"



Geom. Deutung



$$|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{c}|$$

Flächeninhalt Parallelogramm

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

geg. $\vec{a}, \vec{b}$ und es gelte: $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$$

Zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besteht eine lineare Abhängigkeit!

Def: Linearkombination

* geg: $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$$

heißt Linearkombination

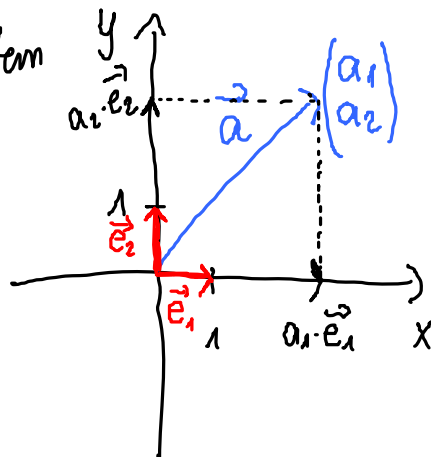
Lineare Unabhängigkeit

Vor. wie oben * : Gilt $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0}$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, dann

heißen $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_n$ linear unabhängig

Koordinatensystem



$$\vec{a} = \boxed{a_1} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{a_2} \cdot \vec{e}_2$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sind
linear unabh.

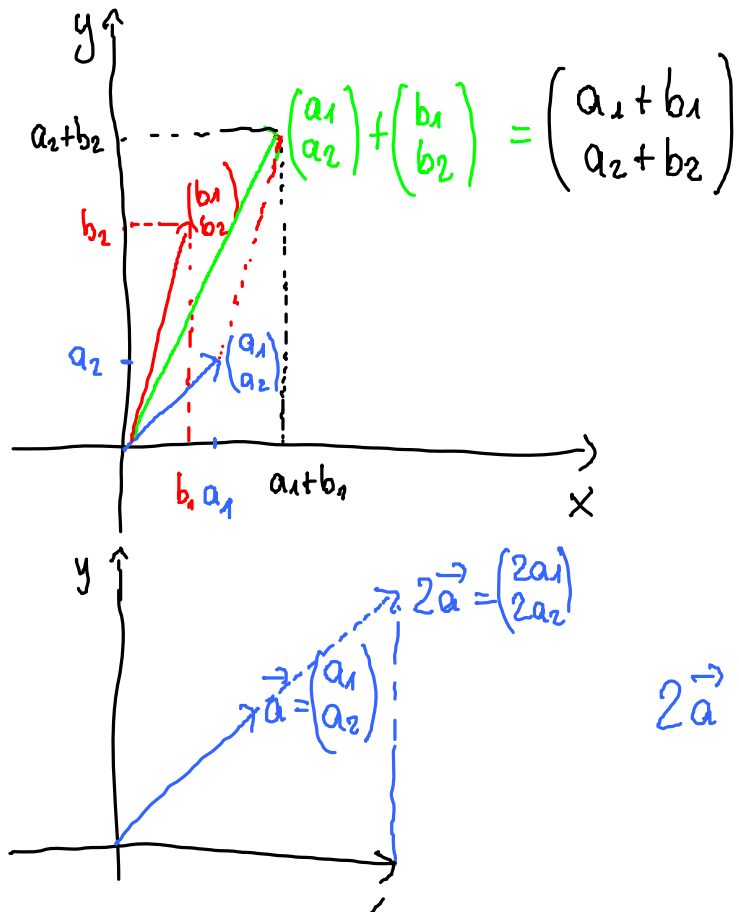
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine
BASIS des $\mathbb{R}^2$

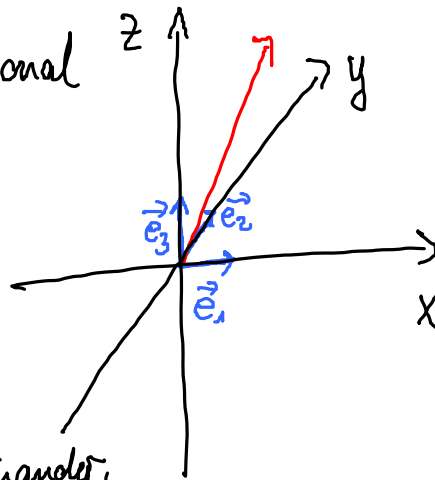
Vektoraddition in der Koordinatenschreibweise:



$$2\vec{a} = 2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

Betrachtungen 3-dimensional

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



stehen alle senkrecht aufeinander,
sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Auf diese Weise kann man nun auch n -dimensionale Vektoren betrachten

Bp: Eine Basis des $\mathbb{R}^5$ bilden $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ausblick: Andere Basen des $\mathbb{R}^2$

