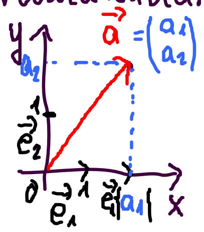
# Mathematik-Vorlesung 9. 12. 2015

## Koordinatendarstellung von Vektoren




$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sind Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$

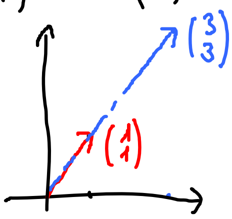
Man kann aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sämtliche Vektoren des $\mathbb{R}^2$ durch Linearkombination erhalten!

Frage: Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Basisvektoren? Ja

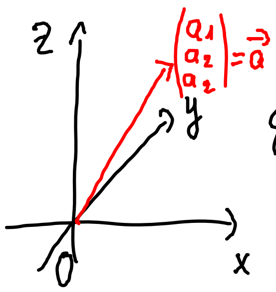
$\frac{1}{2}\vec{e}_1$ $\frac{1}{2}\vec{e}_2$ lin. unabh.

Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ Basisvektoren? Nein

im Vektorraum $\mathbb{R}^2$




lin. abh.




Eine Basis des $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Bsp: geg.: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 - \lambda_3 \cdot 1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 + \lambda_3 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 & \text{I} \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 & \text{II} \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 & \text{III} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Aus I folgt} &: \lambda_1 = \lambda_3 \\ \text{Aus II folgt} &: \lambda_2 = \lambda_3 \end{aligned}\right\} *$$

Mit $*$ $\quad 2\lambda_1 + 3\lambda_1 + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

und mit $*)$ : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Damit : $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ Basis des $\mathbb{R}^3$

Aufgabe : Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, um den Vektor $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ aus $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ zu erhalten!

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 &= 9 & \text{I} \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 7 & \text{II} \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 6 & \text{III} \end{aligned}$$

Aus I : $\lambda_3 = -9 + \lambda_1$ $*$

$*$ in II : $-\lambda_2 - 9 + \lambda_1 = 7$

$-\lambda_2 + \lambda_1 = 16$

$\lambda_2 = -16 + \lambda_1$ $*$

Mit $*$ und $*$ in III

$2\lambda_1 + 3(-16 + \lambda_1) + -9 + \lambda_1 = 6$

$2\lambda_1 - 48 + 3\lambda_1 - 9 + \lambda_1 = 6$

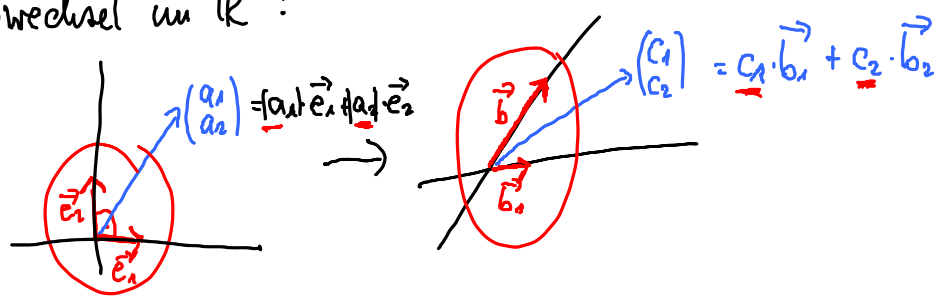
$6\lambda_1 = 63$

$\boxed{\lambda_1 = \frac{63}{6}}$

$\boxed{\lambda_2} = -16 + \frac{63}{6} = -\frac{96}{6} + \frac{63}{6} = \boxed{-\frac{33}{6}}$

$\boxed{\lambda_3} = -9 + \frac{63}{6} = -\frac{54}{6} + \frac{63}{6} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Basiswechsel im $\mathbb{R}^2$:




Skalarprodukt in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} =$ nicht definiert

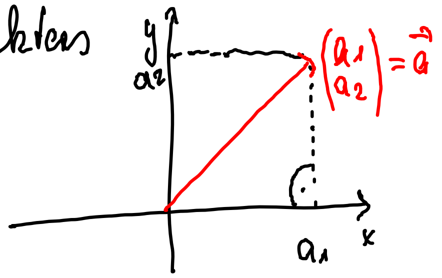
Vektoren müssen dieselbe Dimension besitzen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1$$

$$= 3 + 10 + 28 + 5$$

$$= 46$$

Länge eines Vektors




$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Pythagoras

Länge eines n-dimensionalen Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Bp: Welche Länge hat $\vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ? $\quad |\vec{e}_5| = 1$

Vektorprodukt = Kreuzprodukt

Winkel zwischen Vektoren

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

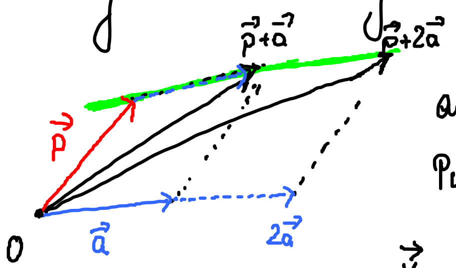
$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad \varphi = \sphericalangle \vec{a},\vec{b}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

# Vektorrechnung in der analytischen Geometrie

## Gerade

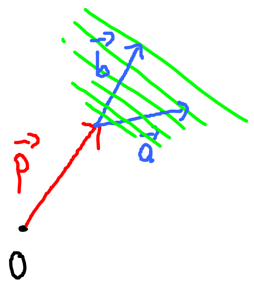



auf der grünen Geraden liegen alle Punkte mit $\vec{p}+\lambda\cdot\vec{a}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a} \quad \lambda\in\mathbb{R}$ Punkt-Richtungsform-Form = Parameterform

$\vec{p}$ Ortsvektor $\quad \vec{a}$ Richtungsvektor

## Ebene

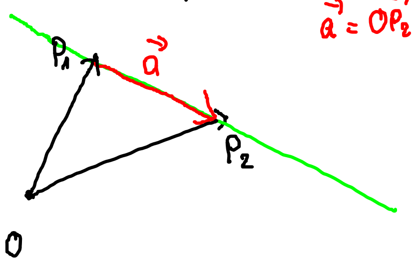



$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Bp: geg. 2 Punkte in Ebene oder im Raum ($P_1, P_2$)
Gesucht: eine Gerade durch diese Punkte

$\vec{a} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

geg. $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$




$\vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$

Zwei-Punkt-Form einer Geraden

Bp: geg. $P_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

Liegt $Q = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$ auf der Geraden durch $P_1$ und $P_2$?

Geradengleichung durch $P_1$ und $P_2$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2-2\\2-0\\2-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Setze $Q$ für $\vec{x}$ ein: $\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

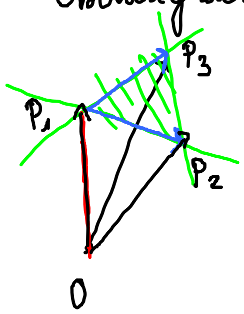
$$2 = 2 + \lambda \cdot 0 \quad ✓$$
$$-2 = 0 + 2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \quad ✓$$
$$6 = 4 - 2\lambda \Rightarrow -2\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \quad ✓$$

Erg: Q liegt auf g

## Drei-Punkteform der Ebene

Geg. $P_1, P_2, P_3$, Ursprung $O$

Ebenengleichung durch $P_1$, $P_2$ und $P_3$ ?




$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda\left(\vec{OP_2} - \vec{OP_1}\right) + \mu\left(\vec{OP_3} - \vec{OP_1}\right)$$

Drei-Punkte-Form der Ebene

## Koordinatenform der Ebenengleichung

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ $\quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

gibt es eine Koordinatenform: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$

$$x_1 = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$x_2 = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2$$
$$x_3 = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

$\lambda, \mu$ werden eliminiert und mit Hilfe von $x_1, x_2, x_3$ ausgedrückt

Bp: Geg: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

I $\quad x_1 = 1 + 5\lambda + 9\mu \quad$ Aus I: $9\mu = x_1 - 1 - 5\lambda \quad$ I'

II $\quad x_2 = 2 + 6\lambda + 9\mu \quad$ Aus II: $9\mu = x_2 - 2 - 6\lambda \quad$ II'

III $\quad x_3 = 3 + 7\lambda + 9\mu \quad$ Aus III: $9\mu = x_3 - 3 - 7\lambda \quad$ III'

I' = II' : $x_1 - 1 - 5\lambda = x_2 - 2 - 6\lambda \Rightarrow \lambda = x_2 - x_1 - 1 \quad *$

* in III' : $9\mu = x_3 - 3 - 7(x_2 - x_1 - 1)$

$$\mu = \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$$

$\mu$ und $\lambda$ in I, II oder III

in I: $x_1 = 1 + 5(x_2 - x_1 - 1) + 9 \cdot \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$

$\vdots$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ Koordinatenform

Frage: Wie erhält man aus der Koordinatenform einer Ebene die Parameterform?

Geg: $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$

Vorgabe z.B. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot x_3 = 14$$
$$\Leftrightarrow 3 - 4 + 3x_3 = 14$$
$$\Leftrightarrow -1 + 3x_3 = 14$$
$$\Leftrightarrow 3x_3 = 15$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 5$$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist Punkt auf der Ebene

Mit $x_2 = -1, x_3 = 0$ erhält man $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen weiteren Punkt

Mit $x_1 = 0$, $x_2 = -7$ " " $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen weiteren Punkt

Damit hat man 3 Pkte und geht wie oben vor:

z.B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Weitere Form einer Ebenendarstellung

Vektorprodukt $\quad (|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi)$

$\vec{c} \perp$ auf $\vec{a}$ und $\perp$ auf $\vec{b}$

$\vec{c}$ wird auch Normalenvektor genannt

Somit kann der Normalenvektor einer Ebene bestimmt werden $\vec{n}$

$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \qquad |\vec{N}| = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{N} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{N} = 0 \qquad \vec{a}, \vec{b}$ Richt.vektoren der Ebene

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Punkt auf der Ebene}$$

Hesse-Normalform der Ebene

# Matrizenrechnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \boxed{a_{ij}} & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile (Zeilenvektor)

Spalte (Spaltenvektor)

i-ten Zeile
j-ten Spalte

$i = 1, \ldots, m$
$j = 1, \ldots, n$

Matrix mit m Zeilen und n Spalten

$(m \times n)$-Matrix

Dimension