Mathematik I - Vorlesung 16.12.2015

1. Vorlesung + 1. Übung (für alle) findet statt
am Mittwoch, 6.1.16 v. 9.00 - 11.30 V
13.00 - 14.30 Ü

A sei $(m \times n)$-Matrix, dann besitzt A m Zeilen (Zeile zuerst)
n Spalten (Spalte später)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \boxed{a_{ij}} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

→ steht in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte

Anwendung: "Tabellen" z.B. Klimatabelle (s. Vorl.)

Input/Output-Tabelle

	Prod. 1	Prod 2	Prod 3
Rohst. 1 (kg)	4	24	130
Rohst. 2 (m^2)	0,12	0,04	0.33
Maschine 1 (h)	0	4	16
Maschine 2 (h)	1,5	0,3	0
Kapital (€)	1,44	0,69	0,84
Arb.zeit (min)	6	4	12

Die zugehörige Koeffizientenmatrix: $\begin{pmatrix} 4 & 24 & 130 \\ 0.12 & 0.04 & 0.33 \\ 0 & 4 & \boxed{16} \\ 1.5 & 0.3 & 0 \\ 1.44 & 0.69 & 0.84 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vergleich von Matrizen

Ordnungsrelation $=, \leq, \geq, <, >$ nur für Matrizen mit derselben Dimension

A, B seien $(m \times n)$-Matrizen

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } \begin{array}{l} i = 1, \ldots m \\ j = 1, \ldots n \end{array}$$

entsprechend $A \leq B \iff a_{ij} \leq b_{ij}$ "

Spezielle Matrizen

quadratische Matrix : $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ $m = n$

Hauptdiagonale
von "links oben" nach "rechts unten"

Achtung : Man mache sich den Verlauf der Hauptdiagonalen in nicht quadr. Matr. deutlich!

Diagonalmatrix : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mm} \end{pmatrix}$

nur hier Koeff. $\neq 0$ möglich

A heißt Diagonalmatrix $\iff$ A ist quadratisch
$a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Einheitsmatrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ für $i = j$

$i = 1, \ldots m$

Einheitsmatrix der Ordnung m

Bp: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix der Ordnung 3

enthält in den Zeilen bzw. Spalten genau die Einheitsvektoren

Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ sei eine $(m \times n)$-Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aus Zeilen werden Spalten und aus Spalten werden Zeilen

$$(A')' = A$$

Sei A Diagonalmatrix, dann $A' = A$

Welche Dimension hat die Transponierte einer $(m \times 1)$-Matrix ?

Antwort: 1 Zeile und m Spalten

Symmetrische Matrizen

A sei quadratisch

Def: A ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$

Bp:
$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen

A sei quadratisch

A ist Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow$ oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

obere Dreiecksmatrix

Untermatrix

Auswahl einer Anzahl Zeilen und Auswahl einer Anzahl Spalten

$M = \{1, \dots m\}$ Zeilenindizes $I \subset M$

$N = \{1, \dots n\}$ Spaltenindizes $J \subset N$

$$B = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i \in I \\ j \in J \end{matrix}$$

Untermatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 13 & 0 & 10 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M = \{1,2,3,4\} \quad I = \{2,4\}$$

$$N = \{1,2,3,4,5\} \quad J = \{1,5\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen – Matrizenoperationen

Addition von Matrizen gleicher Dimension:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Addition $\quad A \pm B = C$ mit $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

und $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Multiplikation mit einem Skalar $\quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Rechengesetze für die Addition und Mult. m. Skalar $\quad$ (A, B, C $(m \times n)$-Matrizen, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

(1) $A + B = B + A$ (kommutativ)

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assoziativ)

Sei 0 Nullmatrix

(3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (distributiv)

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (")

(4) $A + 0 = A$ (Nullmatrix übernimmt die Fkt. des Nullelements)

(5) Es ex. zu A ein D mit $A+D = 0$, $D = -A$

$\downarrow$

inverse Element bzgl. Addition

(6) $(A \pm B)' = A' \pm B'$

Matrizenmultiplikation

Einführendes Beispiel

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte P1 und P2 und zwar x P1 und y P2 in den Monaten Januar bis März

	P1 x	P2 y
Jan	5	3
Feb	9	7
März	4	11

Die Preise sind in allen Monaten gleich und betragen $p := \begin{array}{cc} P1 & P2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 50 & 90 \end{pmatrix}$ pro Stück

Die monatlichen Einkünfte betragen:

Januar: $5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 = 520$

Februar: $9 \cdot 50 + 7 \cdot 90 = 1080$

März: $4 \cdot 50 + 11 \cdot 90 = 1190$

$$\begin{array}{c} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{array} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} \begin{array}{c} P1 \\ P2 \end{array} = \begin{pmatrix} 520 \\ 1080 \\ 1190 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{array}$$

$\underbrace{3 \times 2 \quad 2 \times 1}$ $\quad 3 \times 1$

Wir betrachten weiter:

Zur Produktion werden Einzelteile E_1, E_2, E_3 benötigt lt. folgender Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline P1 & 4 & 2 & 1 \\ P2 & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

Berechnung der monatlichen für die Produktion benötigten Einzelteile

Jan: $5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 20$ E1
$5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 25$ E2
$5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 14$ E3

Feb: $9 \cdot 4 + 7 \cdot 0 = 36$ E1
$9 \cdot 2 + 7 \cdot 5 = 53$ E2
$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 30$ E3

März: $4 \cdot 4 + 11 \cdot 0 = 16$ E1
$4 \cdot 2 + 11 \cdot 5 = 63$ E2
$4 \cdot 1 + 11 \cdot 3 = 37$ E3

1. Zeile x 1. Spalte
Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|ccc} & E1 & E2 & E3 \\ \hline \text{Jan} & 20 & 25 & 14 \\ \text{Feb} & 36 & 53 & 30 \\ \text{März} & 16 & 63 & 37 \end{array}$$

3×2 $\quad 2 \times 3 \quad$ 3×3

Merke $A \cdot B \neq B \cdot A$

da: A $(m \times n)$ - Matrix
B $(n \times m)$ - Matrix

$\underbrace{A \cdot B}_{m \times n \quad n \times m}$ $(m \times m)$ Matrix $\qquad \underbrace{B \cdot A}_{n \times m \quad m \times n}$ $(n \times n)$ Matrix

selbst für $n = m$ ist $A \cdot B \neq B \cdot A$

Es gilt aber, falls die Vor. für Multiplikation erfüllt sind

$(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$ Assoziativgesetz

$A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + BC$
Distributivgesetz

Bp: $\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 5}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 5}{\begin{pmatrix} \boxed{126} & \boxed{18} & \boxed{47} & \boxed{59} & \boxed{26} \\ \boxed{11} & \boxed{6} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{89} & \boxed{12} & \boxed{8} & \boxed{24} & \boxed{28} \end{pmatrix}}$

Besonderheiten der Matrizenmultiplikation

$\mathbb{R}$	Matrizen
$a^2 = a \Rightarrow a = 1$ oder $a = 0$	$A^2 = A$, obwohl $A \neq E$ oder $A = 0$
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$b \cdot c = 0 \Rightarrow b = 0$ oder $c = 0$ oder $b = c = 0$	$B \cdot C = 0$ obwohl $B \neq 0$ und $C \neq 0$
	$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die Inverse einer Matrix

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Besitzt A eine Inverse, so wird diese mit A^{-1} bezeichnet

A regulär $\Leftrightarrow$ A besitzt eine Inverse, und zwar eindeutig nur eine

A singulär $\Leftrightarrow$ A besitzt keine Inverse

Eigenschaften: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

$$\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$$

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

Bp: geg: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gesucht A^{-1} A sei regulär

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}\cdot x_{11} + a_{12} x_{21} &= 1 && \mathrm{I} \\ a_{11}\cdot x_{12} + a_{12}\cdot x_{22} &= 0 && \mathrm{II} \\ a_{21}\cdot x_{11} + a_{22}\cdot x_{21} &= 0 && \mathrm{III} \\ a_{21}\cdot x_{12} + a_{22}\cdot x_{22} &= 1 && \mathrm{IV} \end{aligned}}$$

Aus III mit II: $x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\cdot x_{11}$ $*$

$*$ in I: $\dots \underbrace{(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})}^{D} x_{11} = a_{22}$

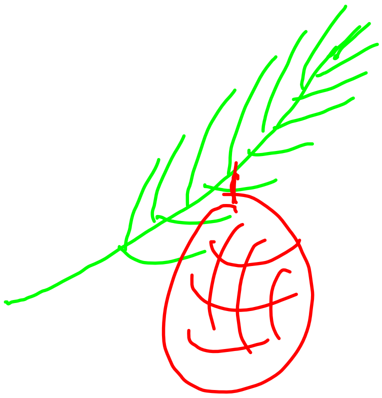
$\vdots$

$\overbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}^{D}\cdot x_{21} = -a_{21}$

$\overbrace{(\quad " \quad)}^{D}\cdot x_{12} = -a_{12}$

$\overbrace{(\quad " \quad)}^{D}\cdot x_{22} = a_{11}$

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$



Frohes Fest!