

Mathematik 6.1.2016

Ich wünsche allen ein friedliches, gesundes, glückliches
und erfolgreiches 2016 !

Wdh. : Inverse Matrix

$$\text{In } \mathbb{R} : ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\text{Bei den Matrizen: } A \cdot X = E \Leftrightarrow X = A^{-1}$$

Berechnung der Inverse am Bp. einer 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \quad \cdot \quad A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

→ später D Determinante

Ökonomische Anwendung von Matrizen

Bp: Firma Holzbaum KG fertigt Wochenendhäuser der Typen

Alb, Rhön und Taunus

	Stahl	Holz	Glas	Arbeitsw.
Alb	5	6	4	17
Rhön	7	8	5	21
Taunus	6	7	7	15

$$= : M$$

$\underbrace{\quad}_{3 \times 4}$

$$\text{Auftrag } A = \begin{matrix} & \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{1 \times 3}$$

$$A \cdot M = \begin{matrix} & \text{Alb} & \text{Rh} & \text{Taunus} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arb} \\ \text{AE} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arb} \\ \begin{pmatrix} 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 4 \quad 1 \times 4$

$$P = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Stahl} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Arbeits} \end{matrix}$$

4×1 Preise pro Einheit

$$\text{Herstellungskosten} : (A \cdot M) \cdot P =$$

$1 \times 4 \quad 4 \times 1 \quad 1 \times 1$

$$(139 \ 162 \ 134 \ 391) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} = 17122$$

Herstellungskosten für den Auftrag

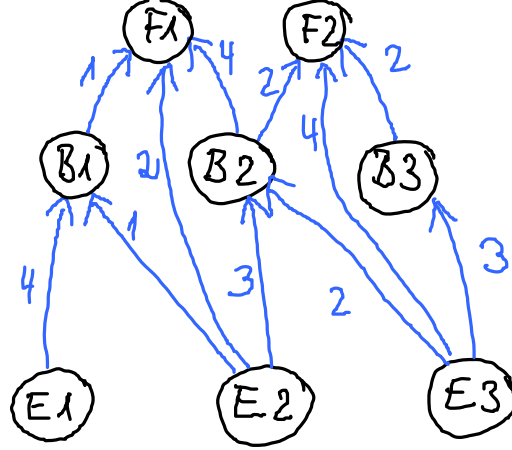
$$\text{Es gilt: } A \cdot (M \cdot P) = (A \cdot M) \cdot P$$

Technologische Matrix

Bp: Zweistufige Fertigung aus 3 Einzelteilen E_1, E_2, E_3

über 3 Baugruppen B_1, B_2, B_3

werden 2 Endprodukte F_1, F_2 produziert



Goziintograph

	E1	E2	E3	B1	B2	B3	F1	F2
E1	0	0	0	4	0	0	0	0
E2	0	0	0	1	3	0	2	0
E3	0	0	0	0	2	3	0	4
B1	0	0	0	0	0	0	1	0
B2	0	0	0	0	0	0	4	2
B3	0	0	0	0	0	0	0	3
F1	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0	0	0

Aus dem Goziintographen lässt sich eine Teilebedarfsmatrix "extrahieren":

	F1	F2
F1	1	0
F2	0	1
B1	1	0
B2	4	2
B3	0	2
E1	4	0
E2	15	6
E3	8	14

8x2

=: T
Teilebedarfs-
matrix

	F1	F2	B1	B2	B3	E1	E2	E3
M1			0.1			0.2	0.5	
M2				0.2			0.4	0.6
M3					0.2	0.6		0.1
M4	0.6	0.1	0.2	0.4				0.3
M5		0.7		0.1	0.5			0.1

=: Z

Zeitbedarfsmatrix

5x8

$$A = Z \cdot T = \begin{matrix} & F1 & F2 \\ M1 & 8.4 & 3 \\ M2 & 11.6 & 11.2 \\ M3 & 3.2 & 1.8 \\ M4 & 6.9 & 2.7 \\ M5 & 1.2 & 3.3 \end{matrix}$$

5x2

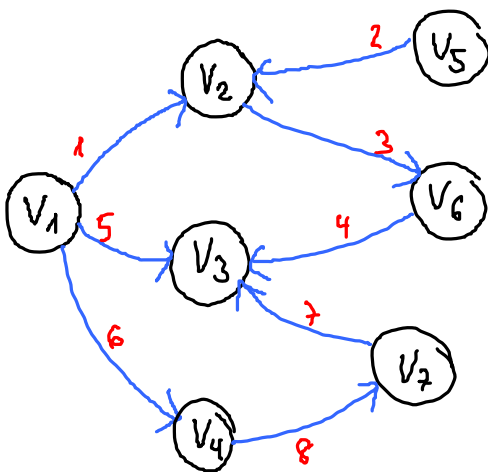
Es sollen gefertigt werden :
$$\begin{matrix} F_1 & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \\ F_2 & \end{matrix} = B$$

(Bestellung)
 2×1

$$A \cdot B = \begin{matrix} M_1 & \begin{pmatrix} 990 \\ 1720 \\ 410 \\ 825 \\ 285 \end{pmatrix} \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{matrix} \quad 5 \times 1$$

zeigt die Belegung der Maschinen an
für den Auftrag B

Netzwerkmatrizen



gerichteter Graph

x_{ij} : Pfeil zwischen Knoten v_i und v_j

$$l_{vx} = \begin{cases} 1 & \text{falls Knoten } v_i \text{ Ursprung des Pfeiles } x \\ -1 & \text{falls Knoten } v_i \text{ Ziel des Pfeiles } x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix

	1	2	3	4	5	6	7	8
V_1	1				1	1		
V_2	-1	-1	1					
V_3				-1	-1	-1		
V_4						-1	1	
V_5		1						
V_6			-1	1				
V_7							1	-1

1, 2, ..., 8 Kantennummern

(1)

(2) Adjazenzmatrix A

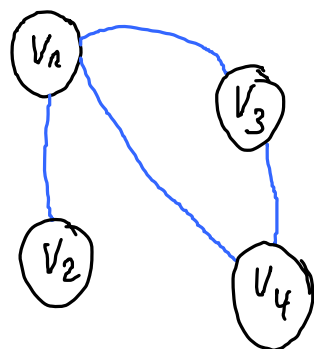
hier werden nur die Knoten "berücksichtigt"

$$a_{v_i v_j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ und } v_j \text{ verbunden} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besser für ungerichtete Graphen

Bp:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



Adjazenzmatrix
eines ungerichteten Graphen

Rang einer Matrix

$\text{rg } A$

A sei $(m \times n)$ -Matrix : $\text{rg } A \leq \min \{m, n\}$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } A = 2$$

da die 2. Zeile das (-2) -fache der 1. Zeile ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg } E = 4$$

Rangbestimmung einer Matrix durch erlaubte elementare Zeilenumformungen,
die äquivalent sind

Bp: $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 7} \xrightarrow{\text{Zeil}} \xrightarrow{\times 2} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{3. Zeile} + 1. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdot 19 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \quad 3. \text{ Zeile} - 2. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} : -14 \\ : 38 \\ : -93 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

damit $\text{rg}(A) = 3$

NB:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ rg} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Zeile - 2x1. Zeile
rg = 1

2. Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 3. \cdot 2 - 1. \cdot 2.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 2. \cdot 2 + 2 \cdot 1. \cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 3. \cdot 2 - 2. \cdot 2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{damit } \text{rg } A = 2$$

Lineare Gleichungssysteme (Lin. GS)

Einigungsbeispiel: $y = \underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + \underline{c}x^2 + \underline{d}x + \underline{e}$

$$a - b + c - d + e = 0$$

$$81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$$

$$108a + 27b + 6c = 0$$

$$d = 0$$

$$e = -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -81 \times 1.2. \\ -108 \times 1.2. \end{array}$$

Gauß'sche Lösungsalgorithmus an obigem Beispiel (Einheitsbeispiel)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 108 & -72 & -240 \\ 0 & 135 & -102 & -324 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 135 \\ \cdot 108 \end{array} \quad -$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 14580 & -9720 & -32400 \\ 0 & 14580 & -11016 & -34992 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 14580 & -9720 & -32400 \\ 0 & 0 & -1296 & -2592 \end{array} \right) \quad : -1296$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 14580 & -9720 & -32400 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e = -3 \\ d = 0 \\ c = 2 \end{array}$$

$$14580b - 9720 \cdot 2 = -32400$$

$$\Rightarrow b = -\frac{8}{9}$$

$$a + \frac{8}{9} + 2 = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

Umgeh.straße : $y = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3$