

Mathematik 13.1.2016

Bp: Sohn kauft 2 Brote und 10 Brötchen, er zahlt 12.20 €
3 Brote und 15 Brötchen, er zahlt 18.30 €

$$2p_1 + 10p_2 = 12,2$$

$$3p_1 + 15p_2 = 18,3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & 12,2 \\ 3 & 15 & 18,3 \end{array} \right) \begin{array}{l} :2 \\ -3 \times I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6,1 \\ 3 & 15 & 18,3 \end{array} \right) - 3 \times I$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. + 1. Gleichung lin.
abhängig

Bp: Lineare GS in der Input/Output-Analyse (statische)

Aufstellen eines GS:

$$X_L = 0,2 X_L + 0,8 X_1 + 800$$

$$X_1 = 0,3 X_L + 0,4 X_1 + 0,125 X_2 + 1200$$

$$X_2 = 0,2 X_L + 0,4 X_1 + 0,25 X_2 + 600$$

Umformung

$$0,8 X_L - 0,8 X_1 = 800$$

$$-0,3 X_L + 0,6 X_1 - 0,125 X_2 = 1200$$

$$-0,2 X_L - 0,4 X_1 + 0,75 X_2 = 600$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,8 & -0,8 & 0 & 800 \\ -0,3 & 0,6 & -0,125 & 1200 \\ -0,2 & -0,4 & 0,75 & 600 \end{array} \right) \begin{array}{l} 840 \\ 1130 \\ 618 \end{array}$$

Gauß'schen LA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3.75 & -3000 \\ 0 & 1 & -1.25 & -1333\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7600 \end{array} \right)$$

$x_L = 8965$

$x_1 = 7915$

$x_2 = 7436$

$x_2 = 7600 \text{ LE}$

* $x_1 = 8166\frac{2}{3} \text{ LE}$ Antwort Frage 1

$x_L = 9166\frac{2}{3} \text{ LE}$

Antwort Frage 2: $x_A = 0.04 x_L + 0.08 x_1 + 0.12 x_2$

* einsetzen

$x_A = 1932 \text{ Zeiteinheiten}$

$x_{\text{Lohn}}^* = 2.6 x_L + 4.3 x_1 + 1.7 x_2$
 $= 71870 \text{ Währungseinheiten}$

Antwort Frage 3:

Änderung der Absolutglieder in 1. gS (0.0.)

Auswirkung auf Arb.zeit und Löhne:

$x_A = 1884.12$

$x_{\text{Lohn}} = 69984.7$

Nachtrag: Tabelle für Input/Output-Analyse von oben

Output \ Input	Landw.	Ind. sek. I	Ind. sek. II	Endnachfrage
Landw.	0.2	0.8	—	800
Ind. sek. I	0.3	0.4	0.125	1200
Ind. sek. II	0.2	0.4	0.25	600
	Vorleistungsmatrix			Endnachfragematrix
Arbeitszeit	0.04	0.08	0.12	/
Löhne	2.6	4.3	1.7	
	Primäraufwandsmatrix			leer

Lösung der "historischen Aufgabe"

Barschaft 1. Reisender : X

" 2. " : Y

" 3. " : Z

$$73 + X + Y = 2(X + Z + Y + Z) \Leftrightarrow X + Y + 4Z = 73$$

$$73 + X + Z = 3(Y + Z + X + Y) \Leftrightarrow 2X + 6Y + 2Z = 73$$

$$73 + Y + Z = 4(X + Y + X + Z) \Leftrightarrow 8X + 3Y + 3Z = 73$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2 \times \text{I.} \\ -8 \times \text{I.} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{array} \Bigg] -$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & 0 & -146 & -2409 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} z = 16.5 \\ y = 6.5 \\ x = 0.5 \end{array}$$

Determinanten

Zur Erinnerung : Inverse einer (2×2) -Matrix führt auf eine

$$\text{"Konstante"} \quad D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Eine Zahl, gebildet aus allen Koeffizienten der Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix

Def: Determinante von A

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wert von D für $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}} - \underbrace{a_{12}a_{21}}$$

2-reihige Determinante

Bp: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -17 \end{pmatrix} \quad \det A = 5 \cdot (-17) - (7 \cdot 2)$
 $= -85 - 14 = -99$

Determinante einer (3×3) -Matrix : 3-reihige Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus

$$\det A = \underline{a_{11}} \underline{a_{22}} \underline{a_{33}} + \underline{a_{12}} \underline{a_{23}} \underline{a_{31}} + \underline{a_{13}} \underline{a_{21}} \underline{a_{32}} - \underline{a_{13}} \underline{a_{22}} \underline{a_{31}} - \underline{a_{11}} \underline{a_{23}} \underline{a_{32}} - \underline{a_{12}} \underline{a_{21}} \underline{a_{33}}$$

Aus jeder Zeile wird in jedem Summanden ein Koeffizient genommen!

Ausflug in die Kombinatorik:

Anordnungsmöglichkeiten von Elementen:

1 Element : 1 Möglichkeit

2 Elemente :  2 Möglichkeiten

3 Elemente : 

 6 Möglichkeiten

4 Elemente : $6 \cdot 4$ Möglichkeiten $= 2 \cdot 3$
 $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

für eine $(m \times m)$ Matrix gilt:

$$\det A = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} \underline{a_{1j_1}} \underline{a_{2j_2}} \dots \underline{a_{mj_m}}$$

$P(j)$: Permutationen des 2. Index

für $m=2$: 2 ($\Rightarrow$ 2 Summanden)

für $m=3$: 6 ($\Rightarrow$ 6 Summanden)

für $m=4$: 24 Summanden

$I(j)$: Zahl der Inversionen in der Permutation

$1\ 2\ 3 \rightarrow 1\ 3\ 2$
1 Inversion

$1\ 2\ 3 \rightarrow 3\ 1\ 2$
2 Inversionen

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen
(da Anzahl der Inversionen geändert wird!)

2) Vertauschen beliebig vieler Zeilen ändert das Vorzeichen
eventuell

$$3) \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

4) Addition zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{21}^* & a_{22} + a_{22}^* & a_{23} + a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5) Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
ändert den Wert der Determinante nicht

Verdeutlichung an einer (2×2) -Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

das λ -fache einer Zeile addieren und neu berechnen.....

Einfachere Methoden zur Determinantenberechnung höherer
Determinanten:

Der Entwicklungssatz von Laplace

Eine Determinante $\det A = |A|$ kann nach einer Zeile
bzw. Spalte entwickelt werden, wobei damit die Ordnung
der Det. um 1 verringert wird!

Bp: Aus einer 4-reihigen werden 3-reihige Determinanten,
die dann mit Sarrus berechnet
werden können

$$a) \det A = \sum_{j=1}^m a_{ij} A_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

nach Zeile i

$$b) \det A = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

nach Spalte j

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$ Entwickeln nach 1. Zeile

$(-1)^{i+j}$

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (2 \cdot 1 + 1 \cdot 3) + (4 \cdot 1 - 2) + 0$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$