Vorlesung 20.1.2016

Abschließende Bemerkungen zum Thema: Determinanten

Bp. Entw.satz Laplace

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{3. Zeile}]{\text{Entwicklung nach der}} +0\cdot\begin{vmatrix}7&10&0\\0&2&3\\6&5&4\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}3&10&0\\1&2&3\\7&5&4\end{vmatrix}$$

$$+ \underbrace{1\cdot\begin{vmatrix}3&7&0\\1&0&3\\7&6&4\end{vmatrix}}_{\text{Entw. nach 2. Zeile}} - 0\cdot\begin{vmatrix}3&7&10\\1&0&2\\7&6&5\end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot\begin{vmatrix}7&0\\6&4\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}3&0\\7&4\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}3&7\\7&6\end{vmatrix}$$

$$= -1(7\cdot4-0\cdot6) + 0 - 3(3\cdot6-7\cdot7)$$

$$= -28 + 93 = 65$$

Günstig für Entw. n. Laplace: Zeile bzw. Spalte mit vielen Nullen!

Das erreicht man z.B. durch "Triangulieren", d.h. die Determinante wird auf Dreiecksform gebracht.

Bsp:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -1.\text{Z.} \\ -1.\text{Z.} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2.\text{Z} \\ \\ +2 * 2.\text{Z.} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\tfrac{1}{2}\,3.\text{Z.} \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +4.\text{Zeile} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 & 0 \end{vmatrix}$$

3 Spalten werden vertauscht

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix}$$

Nun Entw. nach 1. Spalte:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{wieder 1. Spalte}]{} 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1. Spalte}]{} 2 \begin{vmatrix} 4 & 1/2 \\ 0 & 9/2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1. Spalte}]{} 4 \cdot 9/2$$

Insgesamt: $(-1)^3\, 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9/2$

$= -36$

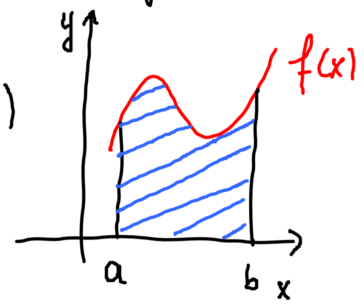
Erwähnt: Cramer'sche Regel

Letztes Thema im WS:

Integralrechnung

2 Herangehensweisen:

1)



2) Differentialrechnung

$f(x) \longrightarrow f'(x)$

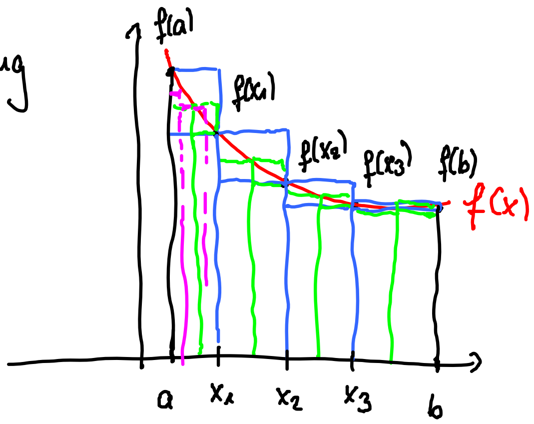
Integralrechnung

$f'(x) \xrightarrow[?]{} f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Problem von 1) führt auf das **bestimmte Integral**

Herleitung



Zerlegung von [a,b] in Teilintervalle

$\Delta x_1 = x_1 - a$

$\Delta x_2 = x_2 - x_1$

$\Delta x_3 = x_3 - x_2$

$\Delta x_4 = b - x_3$

Man bildet Rechtecke, einmal mit dem kleinsten Fkt.wert auf dem Teilintervall als Höhe

$\rightarrow \ldots \rightarrow$ Untersumme U

und einen l mit dem größten Fkt.wert

.....

$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \ldots$ Obersumme O

Im Bp: $U_4 = \Delta x_1 \cdot f(x_1) + \Delta x_2 \cdot f(x_2) + \Delta x_3 \cdot f(x_3) + \Delta x_4 \cdot f(b)$

$O_4 = \Delta x_1 \cdot f(a) + \Delta x_2 \cdot f(x_1) + \Delta x_3 \cdot f(x_2) + \Delta x_4 \cdot f(x_3)$

Es gilt $U_4 < A_{ges.} < O_4$

Bei zunehmender Verfeinerung der Teilintervalle nähert man sich der gesuchten Fläche an!

Def: Das bestimmte Integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(x_k)\cdot\Delta x_k}_{\text{Rechtecksflächen}}$$

"ganz dünn"

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

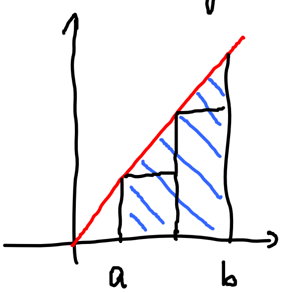
x Integrationsvariable

$f(x)$ Integrand

a untere, b obere } Integrationsgrenze

heißt das bestimmte Integral in den Grenzen a bis b

Bp: $\int_a^b x\,dx$



Man wähle $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ Aufteilen von $[a,b]$ in n gleiche Teile

Zerlegungspunkte: $x_k = a + k\cdot\Delta x$ $k = 0, 1, \ldots, n$

Wähle Untersumme:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot\Delta x \underset{f(x)=x}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\cdot\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[a + (k-1)\cdot\Delta x\right]}_{=x_{k-1}} \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^{n} (k-1)\cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^{n-1} k \right)$$

Summe der ersten n-1 natürl. Zahlen

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{\cancel{n}} \left(\cancel{n} \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n} \right)$$

für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = 1$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

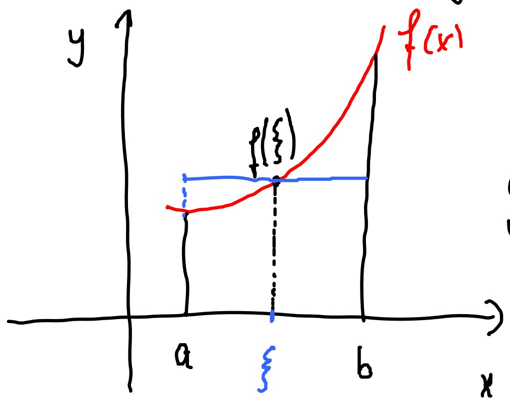
$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Also: $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

[→ später: $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$]

Eigenschaften des bestimmten Integrals ergeben sich aus den Eigenschaften der Grenzwertberechnung!

Mittelwertsatz der Integralrechnung



$$\underbrace{(b-a)\cdot f(\xi)}_{\text{Rechteck}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Fläche unter der Kurve = Rechtecksfläche

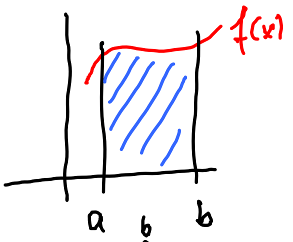
Das unbestimmte Integral

Gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ ist unbestimmt, da z.B. $(F(x)+C)' = f(x)$

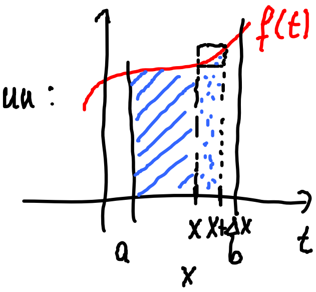
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



$A = \int_a^b f(x)\,dx$

Nun:



$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$$

$$\underbrace{f(x)\cdot\Delta x}_{\text{untere Rechteck}} \le \Delta I \le \underbrace{f(x+\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{obere Rechteck}}$$

$:\Delta x$

$$f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} f(x)}_{=f(x)} \le \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}}_{=I'(x)} \le \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)}_{=f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = I'(x)$$

Jedes unbestimmte Integral ist eine Stammfunktion zu $f(x)$:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Hauptsatz der Diff. u. Int. rechnung

Es gilt $I'(x) = f(x)$

Differenzieren und Integrieren sind inverse Operationen

Folgerung aus diesem Satz:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

$$x = b: \quad \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Schema zur Berechnung eines bestimmten Integrals:

1) Suche F
2) Berechne $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Problem: Wie bestimme ich F?

Aus bekannten Ableitungen

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \qquad \text{Bp.} \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Integration zusammengesetzter Funktionen:

1) Partielle Integration – Produktintegration

Herleitung $\quad (f(x)\cdot g(x))' \overset{\text{Produktregel aus der Diff.rechn.}}{=} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$$

Auf beiden Seiten integriert $\quad \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f(x)\cdot g(x))'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

$$\Leftrightarrow \quad \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Bp: $\int x^2\cdot e^x\,dx \qquad f(x) = x^2 \quad g'(x) = e^x$
$\qquad\qquad\qquad\qquad f'(x) = 2x \quad g(x) = e^x$

$$= x^2\cdot e^x - \underbrace{\int 2x\cdot e^x\,dx}$$

nochmals partielle Int. mit $f(x) = 2x \quad g'(x) = e^x$
$\qquad f'(x) = 2 \quad g(x) = e^x$

$$= 2x\cdot e^x - \underbrace{\int 2\cdot e^x\,dx}_{= 2e^x}$$

$$= x^2\cdot e^x - (2x\cdot e^x - 2e^x)$$

$$= x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

2) $\boxed{\int x\cdot \sin x\,dx} \qquad f(x) = x \quad g'(x) = \sin x$
$\qquad f'(x) = 1 \quad g(x) = -\cos x$

$$= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx = \boxed{-x\cdot\cos x + \sin x + C}$$