
Matrizen und Matrizenoperationen in der Anwendung

Prof. Dr. Wolfgang Konen
FH Köln



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne

Matrizen / Überblick

- ▣ Ziele dieses Kapitels
 - Wieso Matrizen
 - Definition Matrix, Matrixmultiplikation
 - Anwendung Produktionsplanung
 - Basiswechsel

Motivation Matrizen

■ Beispiel Produktionsplanung

- Aus $k=1, \dots, 3$ Rohstoffen R_k werden Endprodukte E_n hergestellt. Die benötigten Rohstoffeinheiten je Einheit E_n sind:

$$0.4R_2 + 0.7R_3 = E_1$$

$$0.1R_1 + 0.25R_2 + 1.2R_3 = E_2$$

- Wenn die Rohstoffpreise p_k je Einheit R_k sind, was sind dann die Kosten q_n je Einheit E_n ?

$$0.4p_2 + 0.7p_3 = q_1$$

$$0.1p_1 + 0.25p_2 + 1.2p_3 = q_2$$

- **LGS:** Lineares Gleichungssystem

Motivation Matrizen

■ Mathematiker sind (schreib-) faule Leute

- Statt

$$0.4p_2 + 0.7p_3 = q_1$$

$$0.1p_1 + 0.25p_2 + 1.2p_3 = q_2$$

- schreiben sie einfacher

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Matrix

Definition

Unter einer **(m x n)-Matrix** (Matrix vom Typ(m,n)) verstehen wir eine rechteckige Zahlenanordnung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile zuerst,
Spalte
später !

oder kürzer

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

Sonderfälle

Spalten- und Zeilenmatrix

Eine (m x 1)-Matrix heißt Spaltenmatrix (**Vektor**)

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nur **ein**
Index !

Eine (1 x n)-Matrix heißt Zeilenmatrix (**Zeilenvektor**)

$$\mathbf{z} = (z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n)$$

Multiplikation von Matrizen

Definition

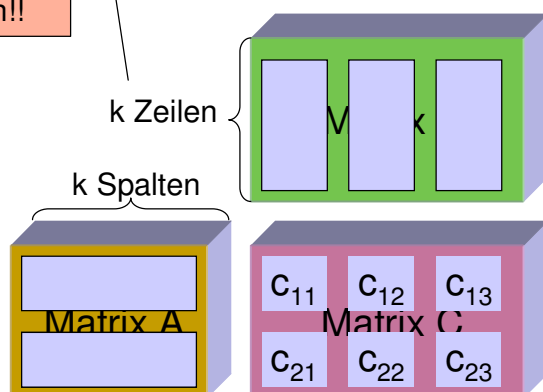
Es sei A eine $(n \times k)$ -Matrix und B eine $(k \times p)$ -Matrix. Unter dem **Produkt** $C=A \cdot B$ verstehen wir die $(n \times p)$ -Matrix mit

$$c_{ij} = (i - \text{te Zeile von A}) \cdot (j - \text{te Spalte von B})$$
$$= \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

heißt auch **inneres** Produkt, weil über die inneren Indizes summiert wird

Rechenschema $A \cdot B = C$

A muss so viele Spalten haben wie B Zeilen!!



Auch hier gilt: Zeile zuerst (in A), Spalte später (in B)

Anwendung Produktionsplanung

- Die Definition Matrixmultiplikation ist genau so gewählt, dass sich wieder das LGS ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

- bedeutet ausmultipliziert

$$\begin{aligned} 0.4p_2 + 0.7p_3 &= q_1 \\ 0.1p_1 + 0.25p_2 + 1.2p_3 &= q_2 \end{aligned}$$

Die Vorteile

- 1. Quartalspreise:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.1 & 0.25 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \end{pmatrix}$$

- Gelten in jedem Quartal andere Rohstoffpreise, so haben wir eine kompakte Darstellung und Berechnungsform der Endpreise.

Die Vorteile

2. Wertstoffketten, Zwischenprodukte, „Basiswechsel“:

➤ Rohstoffe $R_k \rightarrow$ Zwischenprodukte $Z_m \rightarrow$ Endprodukte E_n

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix B}}$$

➤ Gegeben die Rohstoffpreise $\mathbf{p}$, wieviel kostet eine Einheit jedes Endproduktes?

Wertstoffketten (2)

▣ kompakte Matrixschreibweise (Endpreise $\mathbf{e}$):

$$\mathbf{e} = \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}_{\equiv \mathbf{C}} \cdot \mathbf{p}$$

▣ bedeutet ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

z.B. $c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Matrix $\mathbf{C}$ vermittelt direkt zwischen Rohstoffpreisen und Endpreisen!

Wertstoffketten (3)

Dieses Beispiel zeigt, daß folgendes gilt:

- ▣ Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix bildet einen Vektor (hier: **p**) auf einen neuen Vektor (hier: **e**) ab.
- ▣ Die Hintereinanderausführung zweier solcher Abbildungen (hier erst die Multiplikation mit der Matrix **A**, anschließend die Multiplikation mit **B**) entspricht gerade der Multiplikation mit der Matrix **C = BA**. Das Matrizenprodukt wird gerade so definiert, daß es diese Eigenschaft hat.

Zusammenfassung

- ▣ Matrizen: kompakte Darstellung von LGS
- ▣ Vektor als Spezialfall einer Matrix
- ▣ Matrixmultiplikation
- ▣ Matrizen vermitteln Wechsel zwischen Koordinatensystemen (Wertstoffketten, „Basiswechsel“)