# V MA1 – 19.10.2016

MA1-Prak: Anmeldtool anmelden
Deadline Do, 20.10.16, $15^{00}$

Facebook-Gruppe MA1

## Ü Doppelsummen

a) $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{10} k\cdot i = \left(\sum_{k=1}^{2} k\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{10} i\right) = (1+2)\cdot(1+\ldots+10) =$

$= 3 \cdot 55 = 165$

zu $\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10\cdot(10+1)}{2}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}}$

Erklärung
$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5 \\ 10+9+8+7+6 \\ \hline 11+11+11+11+11 \end{array} \Big| + \quad = 55 = \frac{N}{2}(N+1) \text{ für } N=10$$

b) $\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\left((k\cdot i)^2+5\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}(k i)^2 + \sum_{k=1}^{3}\underbrace{\sum_{i=1}^{4} 5}$

$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} k^2\cdot i^2 + \sum_{k=1}^{3} 4\cdot 5$

$= \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{4} i^2\right) + 3\cdot 20$

$= (1^2+2^2+3^2)\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2) + 60$

$= 14 \cdot 30 + 60 = \underline{\underline{480}}$

Anmerkung: $\sum_{m=1}^{3} 2m+3$ ist nicht klar:

entweder $\sum_{m=1}^{3}(2m+3) = 12 + 3\cdot 3 = 21$

oder $\left(\sum_{m=1}^{3} 2m\right) + 3 = 12 + 3 = 15$

## Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot\cancel{(n-k)}\cdot\cancel{\ldots}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{(n-k)}\cdot\cancel{\ldots}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1}$

$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$

Wenn ~~k kurz unter n ist oder~~ k sehr klein

$\binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = \underline{\underline{4950}}$

$$\binom{100}{98} = \frac{100!}{98!\,2!} = \frac{100!}{2!\,98!} = \binom{100}{2}$$

allgemein: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$\boxed{\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der $k$-Teilmengen aus einer $n$-Menge$}$

↪ Kombinatorik, MA2

Pascal'sche Dreieck

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= 1\,a^0 b^7 + 7\,a^1 b^6 + 21\,a^2 b^5$$

$$+ 35\,a^3 b^4 + 35\,a^4 b^3 + 21\,a^5 b^2$$

$$+ 7\,a^6 b + 1\,a^7 b^0$$

Folgerung:

$$(1+1)^n = \boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$

= Anzahl der Teilmengen (überhaupt) einer $n$-Menge

# Zahlenfolgen

Beispiel

| $n$ | 1 | 2 | | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $A_n = 100n + \underline{n^2}$ | 101 | 204 | ... | $100 \cdot 100 + 100^2$ |
| $B_n = \underline{3n^2} - 5$ | -2 | 7 | | $-5 + \underline{3 \cdot 100^2}$ |

Für große $n$ ist die höchste Potenz ($n^2$) wichtig und deshalb hat $B_n$ die höhere Laufzeit ($3n^2$)

## Beispiele Folgen

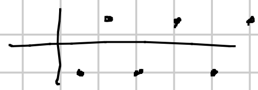
1) $a_n = \frac{1}{n}$

$(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\quad \downarrow$, n.o.b. (z.B. $k = 1$)
n.u.b. (z.B. $k = -1$ oder $0$)

2) $a_n = 2^n$

$(a_n) = 2, 4, 8, 16, \ldots$ $\quad \uparrow$, n.u.b., NICHT n.o.b.

3) $a_n = (-1)^n$ (alternierende Folge)



$(a_n) = -1, +1, -1, +1, \ldots$ $\quad$ n.o.b., n.u.b.

4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = q\,a_n$ (rekursiv) $\quad$ geometrische Folge

$(a_n) = 1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$

5) $a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$

$(a_n) = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{99}{101}, \ldots, \frac{999}{1001}, \ldots$

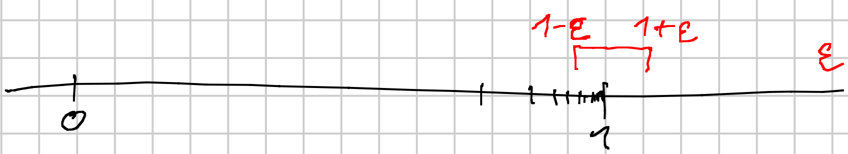
$\uparrow$, n.o.b ($k = 1$)
n.u.b. ($k = 0$)

---

## Grenzwert

Bsp: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{999}{1000}, \ldots, \frac{99999}{100000}, \ldots$





$\varepsilon$: kleine Zahl

# Weitere Beispiele zu Grenzwert

1) $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ "Nullfolge" eine Folge mit Grenzwert $g=0$

Beweis, dass $g=0$ Grenzwert für $a_n = \frac{1}{n}$:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für jedes $\varepsilon$ gilt: Ab $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ liegen alle Folgenglieder "im $\varepsilon$-Kasten"

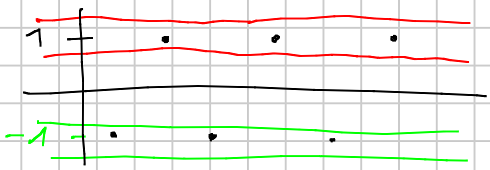
2) $$a_n = \frac{2n-1}{3n} = \frac{2n}{3n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\to\,\frac{2}{3}} - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}}_{\to\,0} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$$

$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

3) $a_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ <u>existiert nicht</u>




4) $a_n = n^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

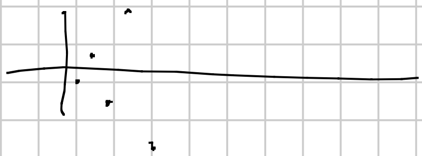
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht (es gibt keine Zahl $g$)

divergent, bestimmt-divergent

$a_n$ hat den <u>uneigentlichen Grenzwert</u> $+\infty$

unglückliche Bezeichnung

5) $a_n = (-1)^n n^2$



divergent

ohne bestimmt-divergent zu sein

6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} = \infty$, falls $\alpha > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0$, " "

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$

7) geometrische Folge

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \quad \text{(konstante Folge} \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$$