

V MA 1 26.10.2016

1. Präh. Gruppen: Do, 3.11.

Staffelplan bis Ende dieser Woche einsehbar

Grenzwert

Bsp: Wieso " $\infty - \infty$ " unentscheidbar ist

1) $a_n = n, b_n = 2n$: $a_n - b_n = n - 2n = -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

2) $a_n = 2n, b_n = n$: $a_n - b_n = 2n - n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

3) $a_n = n+2, b_n = n$: $\underbrace{a_n - b_n}_{\infty - \infty} = n+2 - n = 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$

Folgerung aus S 3-4

a) Für $q > 1$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q^n} \right) \stackrel{\text{S 3-4}}{=} \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} q^n} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$

b) Für $\alpha > 0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \right) = \frac{1}{\infty^\alpha} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^\alpha = 0^\alpha = 0$$

Übung Grenzwerte

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 \quad | \text{g.P.i.N. } \left(\frac{\frac{7}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \right)$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{7 - 0}{3 + 0} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{49}{9}}}$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(n-1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n^4} - n^3 - (\cancel{n^4} + n^3)}{n^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3}{n^2 - 1} \quad | \text{g.P.i.N. } (n^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n-1}$$

$$\stackrel{\text{g.P.i.N.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + \frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$= \infty - \infty$$

geht nicht

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{-\infty}{1-0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k} \cdot 10^{-2}}$$

| gP: N (10^{2k})

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^{k-2k} + 6 \cdot 10^{2k-2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3-2k} - 20 \cdot 10^{2k-2k}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^{-k} + 6}{0.4 \cdot 10^{-k-3} - 0.2} = \frac{6}{-0.2} = \underline{\underline{-30}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 10^{-k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= 0$$

Fixpunkt-Iteration

$$x^2 = 2 \quad | +x^2$$

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad | :x \quad | x \neq 0$$

$$2x = x + \frac{2}{x} \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$\downarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right)$$

ii) O-Notation

4) Was ist das "billigste" $O()$ für

$$a_n = \frac{n^4 + n^2}{n + 5}$$

Annahme $b_n = n^3$ wäre die "billigste" Folge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n^4 + n^2)}{(n + 5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2}{n^4 + 5n^3} \underset{\text{gP: } N}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1 \checkmark$$

$$\underline{\underline{a_n \in O(n^3)}}$$

Ergänzung: Eine weitere (etwas ungenaue) Schreibweise ist

$$a_n = 2n^3 + O(n^2)$$

für den Sachverhalt

$$a_n - 2n^3 \in O(n^2)$$

d.h. die nachfolgenden Terme nach $2n^3$ gehören zur Wachstumsklasse $O(n^2)$

Übung O-Notation (Forts.)

a_n	$O(a_n)$
2) $7n^5 + 26n^6$	$O(n^6)$
3) $n + 3n^2 - 2n \log n$	$O(n^2)$
5) $\frac{n^4 + n^2}{n+5} - n^3$	$O(n^2)$

$$\begin{aligned} O(1) &< O(\log n) \\ &< O(n) < O(n \log n) \\ &< O(n^2) < \dots \end{aligned}$$

Rechnung zu 5) $\frac{n^4 + n^2}{n+5} - \frac{n^3(n+5)}{n+5} = \frac{\cancel{n^4} + n^2 - \cancel{n^4} - 5n^3}{n+5}$
 $= \frac{-5n^3 + n^2}{n+5}$

Annahme: $b_n = n^2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^3 + n^2}{n^3 + 5n^2} = \frac{-5}{1} = -5$
gPKW

$\Rightarrow O(n^2)$